

সরল গণিত-বীজগণিত ।



১০.৫.১৯
৩২২৭

সরল গণিত।

দ্বিতীয় ভাগ।

বীজগণিত।

শ্রীসার্ব গুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়, কেটি,
এম-এ, ডি-এল, পিএচ্-ডি,
প্রণীত।

Calcutta
S. K. LAHIRI & CO.
56, COLLEGE STREET

1914

Printed and published by J. C. GHOSH for Messrs S. K. LAHARI & Co.,
at the Cotton Press, 57 Harrison Road, Calcutta.

বিজ্ঞাপন ।

• বাঙ্গালা ভাষায় বীজগণিতের গ্রন্থ অধিক নাই। অধ্যাপক ৮ প্রসন্নকুমার সর্বাধিকারী মহাশয়ের প্রণীত এক খানি, ও প্রসিদ্ধ লেখক ৮ বাঙ্করমুখ মুখোপাধ্যায় মহাশয়ের প্রণীত আব এক খানি, এই দুইখানি বাঙ্গালা ভাষায় বীজগণিত দেখিয়াছি। প্রথমোক্ত পুস্তকে শ্রেণী পর্য্যন্ত, ও দ্বিতীয়োক্ত পুস্তকে সমাকরণ পর্য্যন্ত, আলোচিত হইয়াছে। কিন্তু তাহাও এখন চণ্ডাপ্য। আমার পাটীগণিত বচনাকালে বাঙ্গালা ভাষায় একখানি বীজগণিত, ও একখানি আধুনিক প্রণালী অনুসারে জ্যামিতি, বচনা কবিবার ইচ্ছা ছিল। এবং তৎক্ষণ্য আমার প্রণীত পাটীগণিতের পুস্তককে সৰল গণিতের প্রথম ভাগ বলিয়া প্রকাশ করা হইয়াছে, আব বীজগণিত ও জ্যামিতি তাহাব দ্বিতীয় ও তৃতীয় ভাগরূপে প্রকাশ হইবে মনে কবিয়াছিলাম। তদনুসারে এই বীজগণিতের পুস্তক প্রণীত হইল।

পাটীগণিতের অনেকগুলি গ্রন্থ থাকা সত্ত্বেও যে যে কারণে আমি একখানি পাটীগণিত বচনায় প্রবৃত্ত হই, তাহা ঐ পুস্তকের বিজ্ঞাপনে ব্যক্ত কবিয়াছি। সে সমস্ত কাৰণ বাঙ্গালা ভাষায় বিবল বীজগণিত রচনা সম্বন্ধে আবও প্রবলরূপে খাটে। এবং তাহাব পুনর্কর্ত্তি নিম্নয়োজন।

এই গ্রন্থখানি কোম ইংবাজি বীজগণিতের অনুবাদ বা অনুকরণ নহে। তবে স্থানে স্থানে প্রচলিত ইংবাজি বীজগণিত হইতে, বিশেষতঃ মাননীয় শ্রীযুক্ত বাবু মহেন্দ্রনাথ রায়ের বীজগণিত হইতে, সাহায্য পাইয়াছি। ইহাতে যে কথা যে প্রণালীতে বলিলে বিজ্ঞাতীৰ মূল তত্ত্ব বুঝিবার সুবিধা হয় মনে কবিয়াছি, সেই কথা সেই প্রণালীতে বলিয়াছি।

অমূল্যলভ্যার্থে উদাহরণ অধিক নাই, এবং যাহা আছে তাহা প্রত্যেক অধ্যায়ের শেষে দেওয়া হইয়াছে। তবে তাহা অধ্যায়ের অন্তর্গত পরিচ্ছেদ অনুসারে শ্রেণিবদ্ধ আছে, এবং তাহা সংখ্যায় অল্প হইলেও প্রকারে বিবিধ।

উচ্চ বীজগণিতের অনেক বিষয় উহারে নাই। কিন্তু যাহা আছে তাহা কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের আই-এ এবং আই-এসসি পরীক্ষায় যতদূর আবশ্যক তদপেক্ষা ন্যূন নহে। ঠিকি।

নাথিকেলডাঙ্গা,

শ্রীগুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায় ।

২২এ ফাল্গুন, ১৩২০।

সূচীপত্র ।

বয়স	পৃষ্ঠা
উপক্রমণিকা ।	১
প্রথম অধ্যায় ।	
যোগ, বিরোগ, ও ঋণবাশি	৬
প্রথম পবিচ্ছেদ ।—যোগ	৬
দ্বিতীয় পবিচ্ছেদ ।—বিরোগ	১০
তৃতীয় পবিচ্ছেদ ।—ঋণবাশি	১৩
দ্বিতীয় অধ্যায় ।	
গুণন, ভাগ, বন্ধনী, বিবিধ সাক্ষেতিকবাক্য, ও	
উৎপাদকবিশ্লেষ	১৮
প্রথম পবিচ্ছেদ ।—গুণন	১৮
দ্বিতীয় পবিচ্ছেদ ।—ভাগ	২৪
তৃতীয় পবিচ্ছেদ ।—বন্ধনী	৩১
চতুর্থ পবিচ্ছেদ । - বিবিধ সাক্ষেতিকবাক্য ও	
উৎপাদকবিশ্লেষ	৩৬
তৃতীয় অধ্যায় ।	
সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক	৪৯
চতুর্থ অধ্যায় ।	
উদাহরণ	৬০
পঞ্চম অধ্যায় ।	
শক্তিপ্রসারণ ও মূল্যাকর্ষণ	৬৫

বিষয়	পৃষ্ঠা
ষষ্ঠ অধ্যায় ।	
শক্তিচিহ্ন, কবলী, ও ভাবনিক বা কারনিকবাশি	৭৫
সপ্তম অধ্যায় ।	
সমীকরণ	৮৭
উপক্রমণিকা	৮৭
প্রথম পরিচ্ছেদ ।—একবর্ণ সরল সমীকরণ	৯০
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ ।—একাধিকবর্ণ সরল সমীকরণ	৯৭
তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।—একবর্ণ বিশক্তি সমীকরণ	১১০
চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।—একাধিকবর্ণ বিশক্তি সমীকরণ	১১০
অষ্টম অধ্যায় ।	
অনুপাত, সমানুপাত, ও বিপবিণাম	১৪০
নবম অধ্যায় ।	
সমান্তরশ্রেণী, সমগুণশ্রেণী, ও লয়শ্রেণী	১৫২
দশম অধ্যায় ।	
প্রস্তার ও সংযোগ	১৬৯
একাদশ অধ্যায় ।	
দ্বিগুণেব শক্তিপ্রসারণ	১৮১
দ্বাদশ অধ্যায় ।	
লগ সংখ্যা	১৯৫
উত্তরমালা ।	২১১



দ্বিতীয় ভাগ ।

বীজগণিত ।

উপক্রমণিকা ।

১। সবলগণিতের চুম্বিকা (প্রথম ভাগের ২ ধাবাতে) বলা চইয়াছে, কোন বিশেষ সংখ্যা না লইয়া, সাধাবণ ভাবে গণনার নিয়ম বা গণনার ফল নির্ণয় করা, গণিতের যে ভাগের বিষয় তাহাকে **বীজগণিত** বলে ।

এবং পাটীগণিতের ১০ বাবাতে বলা হইয়াছে, অক্ষর স্থলে, অক্ষর দিয়া বচিত বা প্রমাণরূপে সাঙ্কেতিক পত্র বা নিয়ম সাধাবণতঃ খাটে ইহা সহজেই বুঝা যায় ।

ইহাতেই আস্তাস পাওয়া যাইতেছে, অক্ষর, সংখ্যা, বা বাশির পবিবর্তে অক্ষরপ্রয়োগ, বীজগণিতের কার্য্যপ্রণালীর প্রধান লক্ষণ ।

২ সংখ্যা বা বাশি **জ্ঞাত** বা **নির্ণীত** এবং **অজ্ঞাত** বা **নির্ণেয়**, এই দুই প্রকারের হইতে পারে । প্রথম প্রকারের সংখ্যা বা বাশির ৮ বর্গে **অ**, **আ**, **ই**, **ঈ** ইত্যাদি স্বর, অথবা **ক**, **খ**, **গ** ইত্যাদি ব্যঞ্জনবর্ণদ্বারা প্রথম ভাগের অক্ষর ব্যবহৃত হইবে, এবং দ্বিতীয় প্রকারের সংখ্যা বা বাশির পবিবর্তে **ঘ**, **ব**, **ল**, **ব**, **শ**, **স**, **হ**, বর্ণমালাব শেষ ভাগের অক্ষর ব্যবহৃত হইবে ।

৩। পাটীগণিতের পবিভাষা ও সাঙ্কেতিক চিহ্ন সমস্তই বীজগণিতে প্রয়োগ করা যায় । অতএব এই বীজগণিতের পুস্তক যখন সবল গণিতের দ্বিতীয় ভাগ, তখন সবল গণিতের প্রথম ভাগে অর্থাৎ পাটীগণিতের

উপক্রমণিকায়, ৫ হইতে ৯ ধাবায় যে সকল পবিভাষাব ও সাংকেতিক চিহ্নের বিবরণ দেওয়া হইয়াছে তাহাব পুনৰুক্তি এখানে নিম্নয়োজন । অতিবিক্ত যে সকল পারিভাষিক শব্দের ও সাংকেতিক চিহ্নের প্রয়োগ বীজগণিতে আবশ্যক, তাহাদের বিবরণ কতক নিয়ে ৪ ধাবায়, ও কতক পবে ক্রমশঃ যথাস্থানে, দেওয়া বাইবে ।

৪। (১) যে বাশি অস্ত্র বাশিব সহিত যোগ কবিত হইবে তাহাকে **ধনবাশি** বা **ধনবাশি** বলে । যে বাশি অস্ত্র বাশি হইতে বিয়োগ করিতে হইবে তাহাকে **ঋণবাশি** বা **ঋণবাশি** বলে ।

ধনবাশি একা বা বাশিমালাব সর্বাংশে থাকিলে তাহাব বামে ধনচিহ্ন + থাকে না, অস্ত্রত তাহাব বামে ধনচিহ্ন থাকে । এবং কোন বাশিব বামে ঋণচিহ্ন—না থাকিলে তাহা ধনবাশি ইহাট বুঝায় । ঋণবাশি দেখানেই থাকুক তাহাব বামে ঋণচিহ্ন থাকে ।

বথা, $৩ = +২, ক = +ক,$

$২ + ৩ = ৫ ।$

$-২ + ৩ = ১, ক + ৭ - ২ = ক$

(২) দুইটি বাশিব মধ্যে — চিহ্ন থাকিলে তাহাদের প্রভেদ বা অন্তর কত তাহাই বুঝায় ।

বথা, $৩ - ৩ = ৩ - ২ = ১ ।$

(৫) অঙ্কে অঙ্কে বা অঙ্কে অঙ্কে গুণিত হইলে গুণন চিহ্ন \times তাহাদের মধ্যে লিখিতে হয় না । কখন কখন তৎপরিবর্তে গুণ্য ও গুণকের মধ্যে একটি বিন্দু অঙ্কিত হয় । অঙ্কে অঙ্কে গুণন হইলে তাহাদের মধ্যে \times অথবা অবশ্যই অঙ্কিত কবিত হয়, কাবণ তাহা না কবিয়া দুইটি অঙ্ক পব পব লিখিলে পাটীগণিতের অঙ্ক লিখনের নিয়মানুসারে (পাটীগণিতের ১৪ ধাবা দ্রষ্টব্য) তাহাব অর্থ অন্তরূপ হয় । এবং দুই অঙ্কের গুণন বুঝাইবার নিমিত্ত তাহাদের মধ্যে যে বিন্দু স্থাপন কবা যায় তাহাব সহিত দশমিক বিন্দুব পার্থক্য প্রদর্শনার্থে সেই বিন্দু দশমিক বিন্দু অপেক্ষা একটু নিম্নতর হাচে অঙ্কিত হয় ।

যথা, কথ = ক × থ - ক খ ।

২ক = ২ × ক - ০ ক ।

২৩ - ২ × ৩ = ৬ ।

কিস্ত ২৩ - ২ × ৩ নতে তাহা = তেইশ ।

এবং ২৩ = ২ + ৩^২ ।

(৪) দুইটি বাশিব মধ্যে \neq এই চিহ্ন থাকিলে তাহাব' অসমান এই বুঝায় ।

যথা, ২৩ \neq ২ × ৩ ।

(৫) বাশিমালাব যে যে ভাগগুলি পবম্পব বনচিহ্ন + বা ঋণচিহ্ন - দ্বারা সম্বন্ধ তাহাদেব প্রত্যেকটিকে সেই বাশিমালাব পদ বলে । যে বাশিমালাতে একটি পদ থাকে তাহাকে একপদ, বাহাতে দুইটি পদ থাকে তাহাকে দ্বিপদ, বাহাতে তিনটি পদ থাকে তাহাকে ত্রিপদ, এবং বাহাতে তিনেব অধিক পদ তাহাকে বহুপদ বলে ।

যথা, ক, কথ, -গ, একপদ ।

ক + থ, ২ক - ৩খ, দ্বিপদ ।

ব + থ + ০, ক - খ - গ, -ক + ২থ + গ, ত্রিপদ ।

০ + চ + ছ - জ, ৫ + ক + থ + ম + প, বহুপদ ।

(৬) কোন পদে একেব অধিক অক্ষ বা অক্ষব থাকিলে তন্মধ্যে কোন একটি অক্ষ বা অক্ষবকে তাহাব প্রকৃতি বলে, এবং অক্ষকে সাক্ষ্যপ্রকৃতি ও অক্ষবকে আক্ষরিক প্রকৃতি বলে ।

যথা, পদটি যদি ০কথ হয়, তাহা হইলে

ক থ'ব প্রকৃতি ০,

০ থ'র প্রকৃতি ক,

ও ০ ক'ব প্রকৃতি থ,

এবং ক থ'র সাধ্য প্রকৃতি ০

ও ০ ক'ব আক্ষরিক প্রকৃতি থ ।

(৭) যে সকল পদে অক্ষবেব প্রভেদ থাকে না, কেবল সাংখ্যপ্রকৃতির প্রভেদ থাকে, তাহাদিগকে **সম পদ** বলে। যাহাদেব অক্ষবেব প্রভেদ আছে, তাহাদিগকে **বিশম পদ** বলে। যথা, ৩কখ ও ৫কখ সমপদ, ২কখ ও ২কগ বিষম পদ।

(৮) বাশিৰ শক্তিব চিহ্নকে **সূচক** বলে।

যথা $৩২ = ৩ \times ৩$, এ স্থলে ৩ তিনেব দ্বিতীয় শক্তিব সূচক।

(৯) কোন দুইটি বাশি বা বাশিমালা সমান হইলে, তাহাদেব মধ্যে এই সমতার চিহ্ন অঙ্কিত করিয়া যে বাশিমালা লিখিত হয় তাহাকে **সমীকরণ** বলে। আব সেই সমতা কোন অক্ষবেব বিশেষ মূল্যে উপব নির্ভব না করিয়া যদি বাশিমালার অক্ষব সকলেব মূল্য যথেষ্ট পরিবর্তিত কবিলেও বজায় থাকে, তাহা হইলে সমীকরণকে **সাম্য** বা **তাদৃশ** বলে।

যথা, $স + ৩ = ৭$,

$$ক = \frac{১}{২}(ক + খ) + \frac{১}{২}(ক - খ),$$

ইহাদেব প্রথমটি সমীকরণ,

কাবণ, তাহাতে সমতা কেবল $স = ৪$ হইলেই থাকে, নতুবা থাকে না এবং দ্বিতীয়টি সাম্য,

কাবণ, তাহাতে সমতা $ক ও খ$ এব মূল্য বাহাই হউক সকল স্থলেই বজায় থাকে,

যে হেতুক, $\frac{১}{২}(ক + খ) + \frac{১}{২}(ক - খ)$

$$= \frac{১}{২} ক + \frac{১}{২} খ + \frac{১}{২} ক - \frac{১}{২} খ$$

$$= \frac{১}{২} ক + \frac{১}{২} ক = ক।$$

(১০) যদি দুইটি বাশি বা বাশিমালা সমান না হয়, তবে তাহাদেব মধ্যে $>$ বা $<$ এই দুইটিব একটি চিহ্ন দিয়া যে বাশিমালা লিখিত হয় তাহাকে **বৈষম্য** বলে।

যথা $২ক + খ > ক + খ$

ইহা একটি বৈষম্য।

(১১) যে কোন বাশি ও এক কে সেট বাশি দিয়া ভাগেব ফল, এই দুটটিকে পবম্পবেব অশ্ম্যাম্বক বলে ।

যথা $k \text{ ও } \frac{1}{k}$ পবম্পবেব অস্তোত্তক ।

• ১। এইখানে গণিতেব ক একটি স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্ব নিয়ে লিপিবদ্ধ করা বাটতেছে । শিক্ষার্থী তাহা মনে বাধিবেন ।

(১) কোন বাশিব সহিত যে কোন একই বাশিব যোগ ও বিয়োগ হইলে, প্রথমোক্ত বাশিব কোন পবিবর্তন হয় না ।

যথা, $k + x - x = k$ ।

(২) কোন বাশিব যে কোন একই বাশি দ্বারা গুণন ও ভাগ হইলে, প্রথমোক্ত বাশিব কোন পবিবর্তন হয় না ।

যথা, $k \times x - x = k$ ।

(৩) কোন সমাকরণেব উভয়দিকে এবই বাশির যোগ, অথবা উভয় দিকে হইতে একই বাশিব বিয়োগ হইলে, দুই দিকে পবম্পর সমতা ব কোন ব্যতিক্রম হয় না ।

যথা, যদি $k + x = g$,

তাহা হইলে $k + x + y = g + y$,

এবং $k + x - c = g - c$ ।

(৪) কোন সমাকরণেব উভয় দিক একই বাশিব দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হইলে, দুই দিকেব পবম্পর সমতা ব কোন ব্যতিক্রম হয় না ।

যথা, যদি $k + x = g$,

তাহা হইলে $(k + x) \times c = g \times c$

এবং $(k + x) \div h = g \div h$ ।



প্রথম অধ্যায় ।

যোগ, বিযোগ, ও ঋণবাশি ।

প্রথম পরিচ্ছেদ ।

যোগ ।

৬। যোজ্য বাশিগুলির অগ্রপশ্চাৎ সন্নিবেশে যোগফলেব কোন পরিবর্তন হয় না । অর্থাৎ

$$ক + খ = খ + ক ।$$

৭। পাটীগণিতেব প্রক্রিয়া কেবল ধনবাশি লইয়া, কিন্তু বীজগণিতেব প্রক্রিয়া ধনবাশি ও ঋণবাশি উভয় প্রকাৰ বাশি লইয়া, এবং ইহা বীজগণিতেব একটি বিশেষ লক্ষণ । অতএব বীজগণিতে যোগক্রিয়ায় যোজ্যগুলি সমস্ত ধনবাশি, অথবা সমস্ত ঋণবাশি, অথবা কতক ধনবাশি ও কতক ঋণবাশি, হইতে পাবে ।

যোগেব সচবাচৰ প্রচলিত অর্থ একত্র করা । যোজ্যগুলি সমস্ত ধনবাশি হইলে সেখানে সে অর্থ অবশ্যই খাটে । এবং তাহাবা সমস্ত ঋণবাশি হইলেও সেখানে সে অর্থ খাটে, তবে সে স্থলে যোগফল ঋণবাশি হইবে, ও তাহাব বান্ধে ঋণচিহ্ন—খাকিবে, অথবা সেই যোগফল বহুপদ হইলে তাহাব প্রত্যেক পদেব বান্ধে—চিহ্ন খাকিবে ।

এতএব যোজ্যগুলি সমস্ত ধনবাশি অথবা সমস্ত ঋণবাশি হইলে, অর্থাৎ সমস্ত একপ্রকাৰেব বাশি হইলে, তাহাদেব যোগের নিয়ম নিম্নলিখিতরূপ হইবে ।

ম্যোগের ১ম নিয়ম । যোজ্যগুলি সমস্ত ধনবাশি হইলে তাহাদিগকে পূৰ্ব পূৰ্ব প্রত্যেকের বান্ধে ধনচিহ্ন অর্থাৎ + চিহ্ন সহ লিখিবে । এবং তন্মধ্যে যেগুলি সমপদ তাহাদিগকে পৃথক্ পৃথক্ না লিখিয়া তৎপৰিবর্তে

ভাটাদেব সাহ্য প্রকৃতিগুলিৰ সমষ্টি লিখিযা তাহাৰ দক্ষিণে তাহাদেব অক্ষ-
গুলি লিখিবে ।

যোজ্যগুলি সমস্ত ঋণবাশি হইলে উক্ত নিয়মে কাৰ্য্য কৰিবে এবং প্রত্যেক
পদেৰ বামে—চিহ্ন বাখিবে ।

এই নিয়মেৰ হেতু নিম্নেৰ উদাহৰণত্ৰয় দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে :

• (১) উদাহৰণ । ক, ৭, গচ, ঘঞপ যোগ কৰ ।

এ স্থলে যোগফল = ক + ৭ + গচ + ঘঞপ ।

(২) উদাহৰণ । ক, খগ, ওখগ, ঘ৭২৬, ৬ঘ ৬ যোগ কৰ ।

এ স্থলে যোগফল = ক + খগ + ওখগ + ঘ৭২৬ + ৬ঘ ৬

ক + ১খগ + ১১ঘ ৬ ।

(৩) উদাহৰণ । -ক, -২খগ, -৭৩গ যোগ কৰ ।

এ স্থলে যোগফল = (-ক) + (-২খগ) + (-৭৩গ)

= -ক + (-২খগ)

= -ক - ২খগ ।

৮। যোজ্যগুলিৰ মধ্যে ধনবাশি ও ঋণবাশি উভয় প্ৰকাৰ বাশি
থাকিলে, সে স্থলে যোগেৰ অর্থ কি তাহা অগ্ৰে স্থিৰ কৰিয় পৰে যোগেৰ
নিয়ম স্থিৰ কৰিতে হইবে । কাৰণ সেক্ষপ স্থলে যোগশব্দ সচবাচৰ প্ৰচলিত
অৰ্থে লওয়া যাইতে পাবে না ।

যোগেৰ প্ৰচলিত অর্থ একত্ৰ কৰা, এবং সে অৰ্থে ধনবাশি ও ঋণবাশি
যোগ কৰা যায় না । ফলতঃ সেক্ষপ যোগকে সচবাচৰ বিয়োগ বুলে । এবং
সচবাচৰ প্ৰচলিত ভাষায় ঋণবাশি বলিয়া কোন পৃথক্ শ্ৰেণিৰ বাশি নাই,
সকল বাশিই ধনবাশি, তবে একবাশি হইতে অপৰ বাশিৰ বিয়োগ কৰিতে
হইলে সেই বিয়োজ্যবাশিকে ঋণবাশি বলা যায় । কিন্তু একটু বিবেচনা
কৰিয়া দেখিলে বুঝা যায় যে, ঋণবাশি কেবল বীজগণিতেৰ বিষয় নহে,
লৌকিক ব্যবহাবেও তাহাৰ অস্তিত্ব আছে, যথা, দেনা টাকা । যদি পাওনা
টাকাকে ধনবাশি বলা যায়, তবে দেনা টাকাকে ঋণবাশি বলাই উচিত ।

সে সকল কথাৰ বিশেষ আলোচনা এই অধ্যায়েৰ চতুৰ্থ পৰিচ্ছেদে

হইবে। এক্ষণে ঋণবাশি আছে ইহা মানিয়া লইয়া, এবং, তাহা সেই বাশিৰ
পরিমাণের বামে ঋণচিহ্ন অর্থাৎ—চিহ্নদ্বারা প্রকাশ কৰা যাউক মানিয়া
লইয়া, দেখা যাউক সেইরূপবাশি ধনবাশিতে যোগেৰ অর্থ কি।

সহজেই দেখা যাইতেছে এক্রূপ যোগেৰ অর্থ প্রচলিত ভাষাৰ বিয়োগঃ।

যথা, $+ক$ এবং $-খ$ উভয়েৰ যোগ $ক$ হইতে $খ$ ৰ বিয়োগ। অর্থাৎ

$$(+ক) + (-খ) = ক-খ।$$

তবে এই বিয়োগ এবং পাটীগণিতেৰ বিয়োগেৰ প্রভেদ এই যে,
পাটীগণিতে $ক$ অর্থাৎ বিয়োজন বাশি $খ$ অর্থাৎ বিয়োজ্য বাশি অপেক্ষা বড়,
কিন্তু বীজগণিতে $খ$ অপেক্ষা $ক$ বড়ও হইতে পারে ছোটও হইতে পারে, এবং
শেবোক্ত স্থলে বিয়োগফলেৰ পৰিমাণ $খ$ হইতে $ক$ বাদ দিলে শূন্য বাধি থাকে
সেই বাশি, ও তাহা ঋণবাশি। যথা,

যদি $ক = ৪$, $খ = ৭$ হয়,

$$\text{তবে } (+ক) + (-খ) = ক-খ = ৪-৭ = -৩।$$

অর্থাৎ ধনবাশি ও ঋণবাশিৰ যোগফলেৰ পৰিমাণ সেই বাশিদ্বয়েৰ
অন্তরজ্ঞাপক বাশি, এবং তাহাব প্রকাৰ সেই বাশিদ্বয়েৰ মধ্যে বৃহত্তৰ বাশিৰ
প্রকার।

২। উপরে যাহা বলা হইল তাহা, একটি ধনবাশিৰ সহিত একটি ঋণ
বাশিৰ যোগেৰ কথা। এক্ষণে কতকগুলি ধনবাশিৰ ও কতকগুলি ঋণবাশিৰ
একত্র যোগেৰ নিয়ম নিয়ে লিখিত হইতেছে।

শোণেন্দ্র ২য় নিয়ম। উপরেৰ ৭ ধাবান্ন লিখিত যোগেৰ
১ম নিয়ম অনুসারে ধনবাশিগুলিৰ সমষ্টি নিরূপণ কৰ, এবং ঋণবাশিগুলিকে
ধনবাশি মনে কৰিয়া তাহাদেব সমষ্টি নিরূপণ কৰিয়া শেবোক্ত সমষ্টিৰ প্রত্যেক
পদের বামে ঋণচিহ্ন স্থাপন কৰ। তদনন্তৰ দুইটি সমষ্টি পৰ পৰ লিখ। এবং
সমপদ ধনবাশি ও ঋণবাশি থাকিলে তৎপৰিবর্তে তাহাদেব সাধ্য প্রকৃতিৰ
অন্তরজ্ঞাপক বাশি লিখিয়া তাহাব বামে সেই সাধ্য প্রকৃতিৰ মধ্যে বৃহত্তৰটির
চিহ্ন স্থাপিত কৰিয়া তাহাব দক্ষিণে সেই পদদ্বয়েৰ অক্ষবভাগ লিখ।

এই নিয়মের/হেতু নিয়েৰ উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

যোগ।

৯

উদাহরণ। $৩ক^২ + ৪খগ - ২ঘ^৩ - ১০,$

$৫ক^২ - ৬খগ + ৩ঘ^৩ + ১৫,$

এবং $৪ক^৩ - ৩খগ + ২ঘ^৩ + ২১,$

যোগ কর।

$$\begin{aligned}
 \text{এস্থলে যোগফল} &= (৩+৫+৪)ক^২ + (৪-৬-৩)খগ \\
 &+ (-২+৩+১)ঘ^৩ + (-১০+১৫+২১) \\
 &= ১২ক^২ + (৪-৯)খগ \\
 &+ (-২+৪)ঘ^৩ + (-১০+৩৬) \\
 &= ১২ক^২ - ৫খগ + ২ঘ^৩ + ২৬।
 \end{aligned}$$

দ্বিতীয় পৰিচ্ছেদ।

বিয়োগ।

১০। বীজগণিতে যোগ ক্রিয়াতে যেনন যোজ্যগুলি কেবল ধনবাশি, বা কেবল ঋণবাশি, অথবা কতক ধনবাশি ও কতক ঋণবাশি হইতে পারে, বিয়োগ ক্রিয়াতেও তেমনই বিযোজন ও বিযোজ্য কেবল ধর্মবাশি, বা কেবল ঋণবাশি, বা কতক ধনবাশি কতক ঋণবাশি হইতে পারে।

১১ (১)। বিযোজন ও বিযোজ্য উভয়ই ধনবাশি হইলে বিয়োগের পূর্বমাণে তাহাদের অন্তরজ্ঞাপক বাশি হইবে, এবং তাহাব প্রকার বিযোজনের যে প্রকার তাহাটী হইবে। কিন্তু বিযোজন অপেক্ষা বিযোজ্য বড় হইলে বিয়োগনের প্রকার বিযোজনের প্রকারের বিপরীত হইবে। উদাহরণে সচক্ষে বুঝা যাইতেছে।

$$\text{যথা } (+ক) - (+খ) = ব - খ।$$

$$৭ - ৩ = ৪।$$

$$১ - ৭ = -৬।$$

এবং সাধারণতঃ, $ক < খ$ হইলে

$$ক - খ = - (খ - ক)।$$

এইরূপ ছোট বাশি হইতে বড় বাশি বাদ দেওয়া কেবল বীজগণিতেই বিয়োগ ক্রিয়ায় বিড়ম্বনা নহে। সংসারের বিবরণক্ষেত্রেও একরূপ বিড়ম্বনা ঘটে। মনে কর কোন ব্যক্তির ঘরে ৭টি টাকা আছে এবং বাজারে ৩ টাকা দেন। সে স্থলে দেনা শোধ করিয়া তাহার ঘরে ৪ টাকা থাকিবে। কিন্তু ব্যবসায়ক্রমে যদি তাহার ঘরে কেবল ৩টি টাকা থাকে এবং বাজারে দেনা ৭ টাকা হয়, তবে পাওনাদার পেড়াপীড়ি করিলে সেই ৩টি টাকা সমস্ত দিয়াও তাহার দেনা শোধ হয় না, তখনও ৪ টাকা দেনা থাকে, অর্থাৎ ৩ টাকা হইতে ৭ টাকা বাদ দিলে 'বাশি' ৪ টাকা থাকে এবং তাহা ঋণবাশি, অর্থাৎ ধনবাশির বিপরীত।

১১ (২) । বিষয়জন ও বিষয়জ্ঞা উভয়েই গুণবাশি বা কৃতক ধনবাশি ও কৃতক গুণবাশি হইলে বিষয়গ জিন্মা কি নিয়মে চলিবে তাহাট এক্ষণে বিবেচ্য ।

দেখা যাউতেছে, $k = k + x - ১$, [৫ ধারাব (১) দ্রষ্টব্য],

$$-k = -k + x - ১ ।$$

$$k - (-১) = k + ১,$$

$$-k - (-১) = -k + ১ ।$$

কাৰণ, এই সমাকৰণদ্বয়ের উভয় দিক চইতে— x বাদ দিলে বান দিকে $k - (-১)$, বা $-k - (-১)$ এবং দক্ষিণদিকে $k + ১$ বা $-k + ১$ থাকে, এবং ৫ ধারাব (৩) দক্ষা অন্তসার উভয় সন্নীকরণেই এই বাকি বা বিষয়গকল সমান ।

অথবা এট কথা আর এক প্রকারে দেখা যাইতে পারে । যথা, মনে কও ক চইতে $x - ১$ বাদ দেওয়া যাউবে, অর্থাৎ ধনবাশি x ও গুণবাশি ১ বাদ দেওয়া যাইবে ।

k হইতে ধনবাশি ১ বাদ দিলে,

$$\text{বাকি} = k - ১ ।$$

কিন্তু এই বাকি টেট বিষয়গকল অপেক্ষা ছোট হইতেছে, কাৰণ k চইতে যাহা বাদ দিতে হইবে তাহা সমস্ত ১ নহে, কিন্তু x চইতে ১ বাদ দিলে তাহা বাকি থাকে কেবল তাহাই মাত্র । এবং ১ অপেক্ষা সেই ন্যূনতর বাশি বাদ দিলে যাহা বাকি থাকে তাহা অবশ্যই পূৰ্ণোক্ত বাকি $k - ১$ অপেক্ষা ১ -পরিমাণে বড় । সুতরাং

$$k - (x - ১) = k - x + ১$$

অর্থাৎ -১ বা গুণবাশি ১ বিষয়গেব অর্থ

$+ ১$ বা ধনবাশি ১ যোগ ।

এইরূপে $k - (x - ১ + ১) = k - x + ১ - ১ ।$

এবং $k - ১ - (x + ১ - ১) = k - ১ - x - ১ + ১ ।$

অতএব বিষয়গ জিন্মাব সাধাবণ নিয়ম এট—

বিক্রোপের নিয়ম । বিযোজ্যের প্রত্যেক পদের চিহ্ন পরিবর্তিত করিয়া, 'অর্থাৎ ধনচিহ্নস্থানে ঋণচিহ্ন ও ঋণচিহ্নস্থানে ধনচিহ্ন লিখিয়া, বিযোজনের পবে এই পরিবর্তিত আকারের বিযোজ্য লিখ ।

উদাহরণ । $৭ক - ৬খ - ৫গ - (৩ক + ৪খ - ১গ)$

$$= ৭ক - ৬খ - ৫গ - ৩ক - ৪খ + ১গ$$

$$= ৪ক - ১০খ + ৬গ ।$$

১২ । বন্ধনী প্রয়োগ ও মোচন সম্বন্ধে এই শ্রেণীস্থ নিয়ম অবলম্বনীয়

যথা, $ক - খ + গ - ঘ = ক - [খ - গ + ঘ]$

$$= ক - [খ - (গ - ঘ)],$$

কারণ, $ক - [খ - (গ - ঘ)] = ক - [খ - গ + ঘ]$

$$= ক - খ + গ - ঘ ।$$

এবং $ক - খ + গ - ঘ = (ক - খ) + (গ - ঘ),$

কারণ $(ক - খ) + (গ - ঘ) = ক - খ + গ - ঘ ।$

— — —

তৃতীয় পৰিচ্ছেদ ।

ঋণবাশি ।

১৩। পূৰ্ণ পৰিচ্ছেদে বলা হইয়াছে, ঋণবাশি কেবল বীজগণিতের বিষয়
নহে, সংসারের কার্যোক্ত তাহার অস্তিত্ব আছে। (৮ ধাৰা দ্রষ্টব্য)। এই
পৰিচ্ছেদে ঋণবাশি সম্বন্ধে আবণ্ড কয়েকটি কথা বলা যাইবে।

১৪। বীজগণিতে ঋণবাশিকল্পনা অনেক স্থলে গণিতের প্রক্রিয়ার
সাধাবণত্ব ও সুবিধা সাধনার্থে প্রয়োজনীয়। নিম্নের দৃষ্টান্তে তাহা দেখা
যাইবে।

(১) প্রথমতঃ দেনাপাওনার একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাউক।
যথা, মনে কব, এক জনের দুই ব্যক্তির সহিত লেনদেন আছে, এবং তাহার
পাওনা প্রথম ব্যক্তির নিকট ক টাকা, দ্বিতীয় ব্যক্তির নিকট খ টাকা, এবং
মোট পাওনা ম টাকা,

তাহা হইলে অবশ্যই সে স্থলে $m = k + x$ । (১)

কিন্তু যদি দ্বিতীয় ব্যক্তির নিকট খ টাকা পাওনা না হইয়া খ টাকা দেনা হয়,
তাহা হইলে সে স্থলে $m = k - x$ । (২)

এবং যদি ক অপেক্ষা খ ছোট না হইয়া বড় হয়,
তাহা হইলে সে স্থলে $m = x - k$, (৩)
এবং ম পাওনা না হইয়া দেনা হইবে।

আবার ক ও খ উভয়ই পাওনা না হইয়া দেনা হইতে পারে, আর
তাহা হইলে সে স্থলে $m = k + x$ (৪)
এবং ম পাওনা না হইয়া দেনা হইবে।

যে কোন বাশি ধনবাশিও হইতে পারে ঋণবাশিও হইতে পারে, বাশির
এই প্রকাবেভেদ যদি মনে বাধি। এবং বামে ধনচিহ্ন + দিয়া ধনবাশি ও বামে
ঋণচিহ্ন - দিয়া ঋণবাশি লিখিত হইবে ইহা স্থির করিয়া লই, অর্থাৎ

ক কখন + ক, কখন - ক

খ + খ, - খ

ম + ম, - ম

হইতে পাবে ইহা মনে বাধি,

তাহা হইলে উপবেব (১), (২), (৩), (৪), এই চাবিটি কথাই একটি কথাত, অর্থাৎ

$$ম = ক + খ$$

এই কথার ব্যক্তি হইতে পাখে, এবং ক, খ, ম, ইহাদের বামেব+অথবা - চিহ্নদ্বারা, কোনটি দেনা, কোনটি পাওনা ও কোন স্থানে মোট কত দেনা বা পাওনা, সহজেই জানাইয়া দিবে। আর এই শেবোক্ত সমীকরণ উপবেব (১) হইতে (৪) এই চাবিটি স্থলে ক্রমান্বয়ে নিম্নের চাবিটি আকার ধারণ করিবে—

$$(১) ম = ক + খ, (২) ম - ক = খ (৩) ম - ক = -(খ - ক),$$

$$(৪) ম = -ক - খ = -(ক + খ)।$$

(১) দ্বিতীয়তঃ দূরত্ব আপেক্ষ একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাউক

$$\text{মনে ক'ব} \quad \frac{\text{ক} \quad \text{খ} \quad \text{গ}}{\text{ক} \quad \text{খ} \quad \text{গ}}$$

ক, খ, গ তিনটি স্থান সমন্বয়ে অর্থাৎ এক সবল বেধাতে আছে, এবং

ক'ব দৈর্ঘ্য = ক হাত

ক'ব দৈর্ঘ্য = খ হাত

$$\text{তাহা হইলে খ'ব ব্যবধান} = খ - ক হাত \quad (১)$$

$$\text{কিন্তু যদি} \quad \frac{\text{খ} \quad \text{ক} \quad \text{গ}}{\text{খ} \quad \text{ক} \quad \text{গ}}$$

খ গ উভয়েই ক'ব দক্ষিণে না থাকিয়া, গ দক্ষিণে ও খ বামে থাকে,

$$\text{তাহা হইলে খ'ব ব্যবধান} = খ + ক হাত \quad (২)$$

যদি ক'ব দক্ষিণেব দূরত্বজ্ঞাপক বাশিকে ধনবাশি ও বামেব দূরত্বজ্ঞাপক বাশিকে ঋণবাশি বলিব এবং তাহাদের একেব বামে + ও অপবেব বামে - চিহ্ন দিব স্থিতি করি, তাহা হইলে

প্রথম স্থলে কথ = + দ, কগ = + ধ,

কিন্তু দ্বিতীয় স্থলে কথ = - দ, কগ = + ধ হইবে ।

এবং থগ'ব ব্যবধান

প্রথমস্থলে = + ধ - (+ দ) = ধ - দ

দ্বিতীয়স্থলে = + ধ - (- দ) = ধ + দ হইবে ।

অতঃপর থগ'ব ব্যবধান = ধ - দ

উভয় স্থলেই বলা যাইবে ।

৩) তৃতীয়তঃ কালপল্লিমাপেক্ষ একটি দষ্টান্ত লওয়া যাউক।

মনে কর কোন ব্যক্তির ক বৎসব বয়সে একটি কন্তা জন্মে, থ বৎসব বয়সে একটি পুত্র জন্মে, এবং গ বৎসব বয়সে আব একটি পুত্র জন্মে, এবং মনে কর কন্তাপুত্রদ্বয়ের মধ্যে কে কালের অপেক্ষা কত বড় বা ছোট ইহাই জিজ্ঞাস্য ।

যদি $k > g$, এবং $k > g$ হয়,

তাহা হইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্তা $k - g$ বৎসব বড়, ।
 ও ২য় পুত্র $k - g$ বড় । । (১)

কিন্তু যদি $k < g$, এবং $k < g$ হয়,

তাহা হইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্তা $g - k$ বৎসব ছোট, ।
 ও ২য় পুত্র $k - g$ বড় । । (২)

এবং যদি $k < g$, এবং $k < g$ হয়,

তাহা হইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্তা $g - k$ বৎসব ছোট, ।
 ও ২য় পুত্র $g - k$ ছোট । । (৩)

এরূপ স্থলে যদি ধনবাণি অর্থাৎ + চিহ্নযুক্ত বৎসব জ্যেষ্ঠত্বজ্ঞাপক, ও ঋণবাণি অর্থাৎ - চিহ্নযুক্ত বৎসব কনিষ্ঠত্বজ্ঞাপক, বলিয়া মানিয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে উপরের (১), (২) ও (৩) এই তিনটি কথাই একটি কথায়, অর্থাৎ উপরের (১) কথায় প্রকাশিত হইবে ।

কাবণ $k < g$ হইলে $k - g = -(g - k) = g - k$ বৎসর ছোট বুঝাইবে

এবং $k < g$ হইলে $k - g = -(g - k) = g - k$ বৎসর ছোট বুঝাইবে ।

১৫। উপবিউক্তরূপে ধনবাশি ও ঋণবাশি, অর্থাৎ + চিহ্নযুক্ত ও - চিহ্নযুক্ত বাশি পরস্পর বিপরীত অর্থজ্ঞাপক হইবে বলিয়া মানিয়া লইলে অনেক স্থলে এক সাঙ্কেতিক বাক্যে অনেক কথা বলা যাইতে পারে ।

১৬। বীজগণিতের প্রক্রিয়ায় সংশ্লিষ্ট বাশিব মধ্যে ধনবাশিকে ঋণবাশি মনে করিলে বা ঋণবাশিকে ধনবাশি মনে করিলে সেই প্রক্রিয়ায় কি অ^১ হয় তাহা প্রত্যেক স্থলে দেখা আবশ্যক ।

১। উদাহরণমালা ।

১। $k + ২x + ৩g^২$, $২k - ৪x - ৬g^২$,

এবং $৩k + ২x - ৪g^২$, যোগ কর ।

২। $k + x + g$, $k + ২ - g$, $k - x + g$,

$-k + x + g$, এবং $-k - x - g$, যোগ কর ।

৩। $৩k^২ + ২x - g^২$ হইতে $k^২ - ৪x^২ + ৫g^২$ বাদ দেও ।

৪। $k - [২ - g - \{২ + ৩g - (৪k + ৫x) \}]$ ইহার বন্ধনী মোচন কর ।

৫। $s^২ + ব^২ + শ + (৩s^২ - ২ব^২ - শ) - \{৪s^২ - (২ব^২ - ২শ) \}$

ইহাকে সরল আকারে আন ।

দ্বিতীয় অধ্যায় ।

গুণন, ভাগ, বন্ধনী, বিবিধ সাঙ্কেতিক বাক্য,

ও উৎপাদকবিশ্লেষ ।

প্রথম পর্নিচ্ছেদ ।

গুণন ।

১৭। গুণন ক্রিয়াতে গুণ্য ও গুণক,

(১) একপদ বা অনেক পদ হইতে পারে,

(২) সমচিহ্ন (+ বা -) যুক্ত অথবা বিষমচিহ্নযুক্ত হইতে পারে, এবং

(৩) একই অক্ষরের ভিন্ন ভিন্ন শক্তি হইতে পারে ।

অর্থাৎ গুণন ক্রিয়া,

(১) $k \times x$, $(k+x) \times (g+x)$, বা $(k-x) \times (g-x)$

এই এই আকাবেব, বা

(২) $(+k) \times (+x)$, $(-k) \times (+x)$, $(+k) \times (-x)$, $(-k) \times (-x)$

এই এই আকাবেব, অথবা

(৩) $k^n \times k^m$

এই আকাবেব হইতে পারে ।

এবং এই ত্রিবিধ স্থলে কি কি নিয়ম অবলম্বনীয় তাহাই বিবেচ্য ।

অর্থাৎ পদ সঙ্কীর্ণ নিয়ম,

চিহ্ন সঙ্কীর্ণ নিয়ম,

শক্তিসূচক সঙ্কীর্ণ নিয়ম,

এই ত্রিবিধ নিয়ম নিরূপণ কবিত্তে হইবে ।

১৮। প্রথমতঃ পদসম্বন্ধীয়া নিয়ম ।

$$ক \times খ = কখ \quad \dots \quad \dots \quad \dots (১)$$

[৪ ধাবাব (৩) দ্রষ্টব্য]

(ব + খ) × (গ + ঘ) ইহার অর্থ, (ক + খ) কে গ দিয়া গুণ কবিয়া সেই গুণফলে (ক + খ) কে ঘ দিয়া গুণ কবিয়া যে গুণফল হয় তাহা যোগ করা ।

এবং (ক + খ) × গ = কগ + খগ, (ক + খ) × ঘ = কঘ + খঘ ।

$$(ক + খ) \times (গ + ঘ) = কগ + খগ + কঘ + খঘ \quad (২)$$

- (ক - খ) × (গ - ঘ) ইহার অর্থ, (ক - খ) কে গ দিয়া গুণ কবিয়া সেই গুণফল হইতে (ক - খ) কে ঘ দিয়া গুণ কবিয়া যে গুণফল হয় তাহা বাম দেওয়া,
এবং (ক - খ) × গ = কগ - খগ, (ক - খ) × ঘ = কঘ - খঘ ।

$$(ক - খ) \times (গ - ঘ) = কগ - খগ - (কঘ - খঘ)$$

$$কগ - খগ - কঘ + খঘ \dots (৩)$$

(১১ ও ১২ ধাবা দ্রষ্টব্য)

১৯। দ্বিতীয়তঃ চিহ্নসম্বন্ধীয়া নিয়ম ।

$$(+ক) \times (+খ) = +কখ, \quad (১)$$

কাবণ, ক পবিমান ধনবাশিকে খ পবিমান ধনবাশি দিয়া গুণ কবিলে গুণফল খ গুণ ক ধনবাশি হইবে ।

$$(-ক) \times (+খ) = -কগ \quad \dots \quad (২)$$

বারণ, ক পবিমান ঋণবাশি খ পবিমান ধনবাশি দিয়া গুণ কবিলে গুণফল খ গুণ ক ঋণবাশি হইবে ।

(+ক) × (-খ) ও (-ক) × (-খ) ইহাদেব অর্থ একটু ভাবিয়া স্থির কবিত্তে হইবে । কাবণ গুণ্য কত বাল্ল লওয়া যাইবে গুণক তাহাট দ্বারা, স্তবৎ সচবাচব প্রচলিত গুণনেব অর্থাভাসারে 'গুণক ঋণবাশি হইতে পারে না, কেন না গুণ্য ঋণবাশি বাব লওয়া যাইবে ইহার কোন অর্থ হয় না । তবে ১৫ ধাবায় লিখিত কথাব প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া আমবা বলিতে পারি,

গুণক ধনবাশি হইলে ও গুণ্য ধনবাশি হইলে গুণফল যেমন ধনবাশি বা যোজ্য বাশি হইবে, তেমনই গুণক ঋণবাশি হইলে ও গুণ্য ধনবাশি হইলে গুণফল তদ্বিপরীত অর্থাৎ ঋণবাশি বা বিরোজ্য বাশি হইবে । এবং গুণক ধনবাশি ও গুণ্য ঋণবাশি হইলে গুণফল যেমন ঋণবাশি বা বিরোজ্য বাশি হয়, তেমনই গুণক ঋণবাশি ও গুণ্য ঋণবাশি হইলে গুণফল তদ্বিপরীত অর্থাৎ ধনবাশি বা যোজ্য বাশি হইবে ।

$$(+ক) \times (-খ) = -কখ \quad (৩)$$

$$(-ক) \times (-খ) = +কখ \quad (৪)$$

উপরেব (১), (২), (৩), (৪) এ চারিটি কথা সম্বন্ধে এক কথায়, এইরূপ বলা হইতে পারে,—

গুণ্য ও গুণকের চিহ্ন সমান হইলে গুণফলের চিহ্ন+, অসমান হইলে গুণফলের চিহ্ন—।

২০। তৃতীয়তঃ শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

$$ক^১ = ক,$$

$$ক^২ = ক \times ক,$$

$$ক^৩ = ক \times ক \times ক,$$

$$ক^n = ক \times ক \times ক \times \dots \quad \text{ন সংখ্যক ক উৎপাদকের গুণফল।}$$

$$ক^m = ক \times ক \times ক \times ক \times \dots \quad \text{ম}$$

$$ক^১ \times ক^২ = ক \times (ক \times ক) = ক^৩ = ক^{১+২}$$

$$ক^২ \times ক^৩ = (ক \times ক) \times (ক \times ক \times ক) = ক^৫ = ক^{২+৩}$$

...

$$\begin{aligned} ক^n \times ক^m &= ক \times ক \times \dots (নসংখ্যক) \times ক \times ক \times ক \dots (মসংখ্যক) \\ &= ক \times ক \times \dots \times ক \times ক \times ক \dots (ন+m) সংখ্যক \\ &= ক^{n+m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ১৯। ক^n \times ক^m &= ক \times ক \times ক \dots (ন সংখ্যক) \times ক \times ক \times ক \dots (ম সংখ্যক) \\ &= ক \times ক \times ক \dots (ন+m সংখ্যক) = (ক^n)^m \end{aligned}$$

২০। গুণ্য ও গুণক উভয়ই অনেকপদ বাশি হইলে তাহাদেব গুণনের নিয়ম এই—

গুণ্য ও গুণক উভয়কেই কোন একটি অক্ষবেব শক্তি চিহ্নক্রে সাজাইয়া, গুণ্যেব নীচে গুণকে লিখ। তাহাব পব গুণকেব প্রত্যেক পদদ্বারা একে একে গুণ্যেব সমস্ত পদকে গুণ করিয়া এক এক পংক্তিতে লিখ। সেই পংক্তিগুলিব যোগফলট গুণফল।

এই নিয়মেব হেতু এবং গুণ্য ও গুণককে কোন একটি অক্ষবেব শক্তি-চিহ্নক্রে সাজাইবাব প্রয়োজন, নিয়মে উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট ব্ধা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $ক^৩ + ক^২ + ২ক$ এই বাশিকে $ক + ক$ দিয়া গুণ কব।

প্রথমতঃ ক'ব শক্তিচিহ্নক্রে সাজান যাউক।

$$\begin{array}{r} ক^৩ + ২ক^২ + ক \\ ক + ক \\ \hline ক^৩ + ২ক^২ + ক^৩ \\ + ক^৩ + ২ক^২ + ক^৩ \\ \hline ক^৩ + ৩ক^২ + ৩ক^৩ + ক^৩ \end{array}$$

দ্বিতীয়তঃ কোন অক্ষবেব শক্তিচিহ্নক্রে না সাজাইয়া দেখা যাউক।

$$\begin{array}{r} ক^৩ + ক^২ + ২ক \\ + ক + ক \\ \hline + ক^৩ + ক^৩ + ২ক^২ \\ ক^৩ + ক^২ + ২ক^৩ \\ \hline + ক^৩ + ক^৩ + ২ক^২ + ক^৩ + ক^২ + ২ক^৩ \\ = ক^৩ + ৩ক^২ + ৩ক^৩ + ক^৩ \end{array}$$

প্রথমবারেব সাজানতে যোগকল যেমন সহজে শক্তিচিহ্নক্ৰমে পাওৱ
গেল, দ্বিতীয় স্থলে তেমন হইল না ।

(২) উদাহরণ । $(ক + খ) \times (ক + গ)$ ইহাব গুণফল কত ?

$$\begin{array}{r} ক + খ \\ ক + গ \\ \hline ক^2 + কখ \\ \quad কখ + গ^2 \\ \hline ক^2 + ২কখ + গ^2 \end{array}$$

(৩) উদাহরণ । $(ক - খ) \times (ক - গ)$ ইহাব গুণফল কত ?

$$\begin{array}{r} ক - খ \\ ক - গ \\ \hline ক^2 - কখ \\ \quad - কখ + গ^2 \\ \hline ক^2 - ২কখ + গ^2 \end{array}$$

(৪) উদাহরণ । $(ক + খ) \times (ক - গ)$ ইহাব গুণফল কত ?

$$\begin{array}{r} ক + খ \\ ক - গ \\ \hline ক^2 + কগ \\ \quad - কখ - গ^2 \\ \hline ক^2 - কখ + কগ - গ^2 \end{array}$$

(৫) উদাহরণ । $(ক + খ) (ক^2 - কখ + গ^2)$ ইহাব গুণফল কত ?

$$\begin{array}{r} ক^2 - কখ + গ^2 \\ ক + খ \\ \hline ক^3 - ক^2খ + কখ^2 \\ \quad + ক^2গ - কখগ + খগ^2 \\ \hline ক^3 + \quad \quad \quad খ^3 \end{array}$$

(৬) উদাহরণ । (ক-খ) (ক^২ + কখ + খ^২) ইহাব গুণফল কত ?

$$\begin{array}{r} \text{ক}^২ + \text{কখ} + \text{খ}^২ \\ \text{ক} - \text{খ} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ক}^২ + \text{ক}^২\text{খ} + \text{কখ}^২$$

$$- \text{ক}^২\text{খ} - \text{কখ}^২ - \text{খ}^৩$$

$$\begin{array}{r} \text{ক}^৩ \quad \quad - \quad \quad \text{খ}^৩ \\ \hline \end{array}$$

১৩। উপবেব ১২ ধাবাব উদাহরণ ৬টিব বলা মনে বাখা আবশ্যক ।
তাঠা নিয়ে লিপিবদ্ধ কবা গেল ।

$$(ক + খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২ \quad (১)$$

$$(ক - খ)^২ = ক^২ - ২কখ + খ^২ \quad (২)$$

$$\text{ক}^২ - \text{খ}^২ = (\text{ক} + \text{খ}) (\text{ক} - \text{খ}) \quad (৩)$$

$$(\text{ক} + খ)^৩ = ক^৩ + ৩ক^২\text{খ} + ৩কখ^২ + খ^৩ \quad (৪)$$

$$(\text{ক} - খ)^৩ = ক^৩ - ৩ক^২\text{খ} + ৩কখ^২ - খ^৩ \quad (৫)$$

$$\text{ক}^৩ + খ^৩ = (\text{ক} + \text{খ}) (\text{ক}^২ - \text{কখ} + \text{খ}^২) \quad (৬)$$

$$\text{ক}^৩ - খ^৩ = (\text{ক} - \text{খ}) (\text{ক}^২ + \text{কখ} + \text{খ}^২) \quad (৭)$$

উপবেব সাঙ্কেতিক বাক্যগুলিতে আব একটি অতি প্রয়োজনীয় কথা লক্ষ্য
কবিয়া দেখিবে ।

(১) সাম্যে প'ব স্থলে-প লিখিলেই (২) সাম্য পাইবে ।

যথা—

$$\begin{aligned} \{ক + (-খ)\}^২ &= (\text{ক} - \text{খ})^২ = ক^২ + ২ক \times (-খ) + (-খ) \times (-খ) \\ &= ক^২ - ২কখ + খ^২ \end{aligned}$$

সেটরূপে (৪) সাম্যে খ'ব স্থলে-খ লিখিলে (৫) সাম্য পাইবে । যথা,

$$\begin{aligned} \{ক + (-খ)\}^৩ &= (\text{ক} - \text{খ})^৩ = ক^৩ + ৩ক^২ \times (-খ) + ৩ক \times (-খ) \times (-খ) \\ &\quad + (-খ) \times (-খ) \times (-খ) \\ &= ক^৩ - ৩ক^২\text{খ} + ৩কখ^২ - খ^৩ \end{aligned}$$

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ ।

ভাগ ।

২৪। ভাগক্রিয়াতে ভাজ্য ও ভাজক,

(১) সমচিহ্ন (+ বা -) বা বিষম চিহ্ন যুক্ত হইতে পাবে,

(২) একই অক্ষরের ভিন্ন ভিন্ন শক্তি হইতে পাবে,

(৩) একপদ বা বহুপদ হইতে পাবে ।

অর্থাৎ ভাগক্রিয়া,

(১) $(+স) - (+ব), (-স) - (-ব), (+স) - (-ব), (-স) - (+ব)$
এই এই আকাবেব, বা(২) $ক^ম - ক^n$

এই আকাবেব, বা

(৩) $ক^৩খ^২গ - ক^২খগ$, কি $(কস^২ + ২কস + স^২) + (ক + স)$

এই এই আকাবেব হইতে পারে ।

এবং এই ত্রিবিধ স্থলে কি কি নিয়ম অবলম্বনীয় তাহাই বিবেচ্য ।

অর্থাৎ চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম,

শক্তি সূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম,

এবং পদ সম্বন্ধীয় নিয়ম,

এই ত্রিবিধ নিয়ম নিরূপণ করিতে চাইবে ।

১৫। প্রথমতঃ চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

গুণন ক্রিয়াতে দেখা গিয়াছে (১৯ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$(+ক) \times (+খ) = +কখ,$$

$$(+কখ) - (+ক) = +খ । \quad (১)$$

$$(-ক) \times (+খ) = -কখ,$$

$$(-কখ) - (-ক) = +খ । \quad (২)$$

$$(-ক) \times (-খ) = +কখ,$$

$$(+কখ) - (-ক) = -খ \quad . \quad (৩)$$

$$\text{এবং } (+ক) \times (-খ) = -কখ,$$

$$(-কখ) - (+ক) = -খ \quad (৪)$$

উপবেব (১), (২), (৩), (৪) এষ্ট চারিটি কথা সংক্ষেপে এক কথায়
এইরূপে বলা যাইতে পারে—

ভাজ্য ও ভাজকের চিহ্ন সমান হইলে ভাগ-
ফলের চিহ্ন+, অসমান হইলে ভাগফলের
চিহ্ন—।

১৬। দ্বিতীয়তঃ শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম
পূর্বে দেখা গিয়াছে (২০ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$ক^n \times ক^m = ক^{n+m},$$

$$ক^{n+m} - ক^n = ক^m = ক^{(n+m)-n}।$$

অর্থাৎ ভাজ্য ও ভাজকের শক্তিসূচকের বিয়োগকলই ভাগ ফলের
শক্তিসূচক ।

এস্থলে ভাজ্যের শক্তিসূচক ভাজকের শক্তিসূচক অপেক্ষা বড় ইহা মানিয়া
লওয়া হইল ।

এই কথা আব এক প্রকারে সপ্রমাণ করা যাইতে পারে ।

$$k^m = k \times k \times k \times \dots \quad (m \text{ সংখ্যক উৎপাদক})$$

$$k^n = k \times k \times k \times \dots \quad (n \text{ সংখ্যক উৎপাদক})$$

$$k^m \div k^n = \frac{k \times k \times k \times \dots}{k \times k \times k \times \dots} \quad \dots \quad \begin{matrix} (m \text{ সংখ্যক উৎপাদক}) \\ (n \text{ সংখ্যক উৎপাদক}) \end{matrix}$$

$$= \frac{k \times k \times \dots (n \text{ সংখ্যক উৎপাদক}) \times k \times k \times \dots [(m-n) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]}{k \times k \times \dots (n \text{ সংখ্যক উৎপাদক})}$$

(যদি $m > n$)

$$= k \times k \times \dots [(m-n) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]$$

$$= k^{m-n} \quad (1)$$

কিন্তু যদি $m < n$, তাহা হইলে

$$k^m \div k^n = \frac{k \times k \times \dots (m \text{ সংখ্যক উৎপাদক})}{k \times k \times \dots [(m \text{ সংখ্যক}) \times k \times k \times \dots ((n-m) \text{ সংখ্যক উৎপাদক})]}$$

$$= \frac{1}{k \times k \times \dots [(n-m) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]}$$

$$= \frac{1}{k^{n-m}} \quad (2)$$

এক্ষণে দেখা যাউক (১) ও (২) এই দুইটি কথা কোন প্রকারে এক কথায় অর্থাৎ একই সাঙ্কেতিক চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যায় কি না।

এই বিষয় দেখিতে গেলেই দেখা আবশ্যিক

$$k^{m-n} \text{ এবং } \frac{1}{k^{n-m}} \text{ ইহাদের কিরূপ সম্বন্ধ।}$$

$$\frac{1}{k^{n-m}} \text{ দেখা যাইতেছে } k^{n-m} \text{ এর অন্তোগতক,}$$

এবং k^{n-m} এর শক্তিসূচক k^{m-n} এর শক্তিসূচকের সহিত পরস্পরে সমান ও প্রকারে অসমান,

$$\text{কারণ } n-m = -(m-n)।$$

কিন্তু যদি $m < n$,

তাহা হইলে $n-m$ ধনবান্ধি

ও $m-n$ ঋণাত্মক পরিমাণ ঋণবান্ধি ।

এবং $k^{n-m} = k \times k \times \dots [(n-m) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]$

অর্থাৎ k কে উৎপাদক রূপে $(n-m)$ বাব লইয়া তাহার গুণফল ।

কিন্তু $k^{-(m-n)}$ ইহার উক্করূপ কোন অর্থ হয় না ।

কারণ,— $(m-n)$ বাব বকে উৎপাদক রূপে লাওয়ার কোন অর্থ নাই ।

তবে দেখা যাউক শক্তিসূচকের যেটি মূল নিয়ম,

অর্থাৎ $k^n \times k^m = k^{n+m}$ (১০ ধারা দ্রষ্টব্য),

তাহার সহিত সঙ্গতি রাখিয়া $k^{-(m-n)}$ অথবা k^{-n} ইহার অর্থাৎ শক্তিসূচক ঋণবান্ধির কি অর্থ হইতে পারে ।

$$\text{যখন } k^n \times k^m = k^{n+m},$$

$$\text{তখন সেই নিয়মে, } k^{n+m} \times k^{-n} = k^{n+m-n}$$

$$= k^m ।$$

$$\text{কিন্তু } k^{n+m} \times \frac{1}{k^n} = k^n \times k^m \times \frac{1}{k^n}$$

$$= k^m ।$$

$$k^m = \frac{1}{k^{-m}} ।$$

অতএব যদি $m < n$,

$$\text{তবে } k^{m-n} = k^{-(n-m)} = \frac{1}{k^{n-m}} ।$$

অতএব $m > n$ বা $< n$ যাহাই হউক, উভয় স্থলেই

$$k^m \div k^n = k^{m-n}$$

বলা যাইতে পারে, যদি মনে রাখা যায় যে

$$m < n \text{ হইলে } k^{m-n} = k^{-(n-m)} = \frac{1}{k^{n-m}} \text{ ।}$$

এবং এই ভাবে লইলে উপবেব (১) ও (২) উভয় কথাই এক কথায় প্রকাশ করা গেল ।

১৭। উপবে যাহা বলা হইল তদনুসারে

$$k^n \times k^{-n} = k^{n-n} = k^0 \text{ ।}$$

$$\text{এবং } k^n \times k^{-n} = k^n \times \frac{1}{k^n} = 1 \text{ ।}$$

$$k^0 = 1 \text{ ।}$$

২৮। তৃতীয়তঃ পদসম্বন্ধীয় নিয়ম ।

(১) যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই একপদ হয়, তাহা হইলে ভাজ্যেব প্রকৃতি ভাজকেব প্রকৃতি দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলেব প্রকৃতি পাওয়া যাইবে, এবং ভাজ্যের প্রত্যেক অক্ষরেব শক্তি ভাজকেব সেই সেই অক্ষরেব শক্তি দ্বারা শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়মানুসারে ভাগ করিয়া সেই সেই ভাগফল ক্রমান্বয়ে পর পদ লিখিবে, এবং ভাজ্যেব অবশিষ্ট যে যে অক্ষর ভাজকেব অবশিষ্ট যে যে অক্ষর দ্বারা ভাগ করা যায় না তদ্বাধ্যে ভাজ্যেব অক্ষরগুলি উপবে ও ভাজকেব অক্ষরগুলি একটি রেখায় নিয়ে লিখিয়া অপর ভাগফলেব পদে লিখিবে । এবং তাহা হইলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে ।

যথা—

$$(১) \quad ৬ ক^৩খ^২গঘ \div ৩ক^২খগ^২$$

$$= \frac{৬ক^৩খ^২গঘ}{৩ক^২খগ^২} = \frac{৬ \times ক^৩ \times খ^২ \times গ \times ঘ}{৩ \times ক^২ \times খ \times গ^২}$$

$$= \frac{৬}{৩} \times \frac{ক^৩}{ক^২} \times \frac{খ^২}{খ} \times \frac{গ}{গ^২} \times ঘ = ২কখগ^{-১}ঘ = \frac{২কখঘ}{গ} \text{ ।}$$

$$(১) \quad \frac{৪ক^১খ^৩গঘ}{২ক^৩খ^৩চ} = \frac{৪}{২} \times \frac{ক^১}{ক^৩} \times \frac{খ^৩}{খ^৩} \times \frac{গঘ}{চ}$$

$$= ২ক^১ \frac{গঘ}{চ} ।$$

(২) যদি ভাজ্য বহুপদ ও ভাজক একপদ হয় তাহা হইলে উপবেব নিম্নমানুসাবে ভাজ্যেব প্রত্যেক পদবে ভাজকদ্বারা ভাগ কবিয়া প্রত্যেক ভাগফল উপবেব চিহ্নসম্বন্ধীয় নিম্নমানুসাবে উপগুক্ত চিহ্নযুক্ত কবিয়া পর পর লিখিলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে ।

$$\text{যথা, } (৬ক^৩খ^২গ^৩ - ৪ক^২খ^২ঘ + ২কগচ) \div ২ক^৩$$

$$= \frac{৬ক^৩খ^২গ^৩}{২ক^৩} - \frac{৪ক^২খ^২ঘ}{২ক^৩} + \frac{২কগচ}{২ক^৩}$$

$$= ৩ক^০খ^২গ^৩ - ২ক^১ঘ + চ ।$$

(৩) যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই একাধিক পদ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত নিয়ম অবলম্বনীয় ।

ভাজ্য ও ভাজক উভয়েব কোন একটি বিশিষ্ট অঙ্কেব শক্তিক্রমানুযে উভয়েব সাজাইয়া, ভাজ্যেব বামে ভাজকে লিখ । এবং ভাজ্যেব প্রথম পদ ভাজকেব প্রথম পদ দ্বারা ভাগ কবিয়া সেই ভাগফল ভাজ্যেব দক্ষিণে লিখ । তাহাই ইষ্ট ভাগফলেব প্রথম পদ । পরে তদ্বারা ভাজকেব গুণন কবিয়া সেই গুণফল ভাজ্য হইতে বাদ দিয়া বাকী ভাজ্যেব নিয়ে লিখ, ও তাহাকেই নূতন ভাজ্য মনে কবিয়া পূর্ব প্রক্রিয়া চালাও, এবং এবাব যে আংশিক ভাগফল পাঠবে তাহা পূর্বোক্ত ভাগফলেব পরে উপগুক্ত চিহ্নসহ লিখ । তাহাই ইষ্ট ভাগফলেব দ্বিতীয় পদ ।

এইরূপ প্রক্রিয়া বতদূর চলে চালাও । ভাগশেষ থাকিলে তাহাকে লব ও ভাজকে হব স্বরূপ লইয়া যে ভগ্নাংশ হয় তাহা ভাগফলেব পরে লিখ । তাহা হইলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে ।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নেব উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে ।

(১) উদাহরণ । $k^3 - x^3 - ৩k^2x + ৩kx^2$ ইহাকে

$k^3 + x^3 - ২kx$ দিয়া ভাগ কর।

এ স্থলে k এবং x ক্রমে সাজাইলে,

ভাজ্য = $k^3 - ৩k^2x + ৩kx^2 - x^3$ ভাজক = $k^2 - ২kx + x^2$

$$\begin{array}{r} k^3 - ৩k^2x + ৩kx^2 - x^3 \\ \underline{k^3 - ২k^2x + kx^2} \\ - k^2x + ২kx^2 - x^3 \\ \underline{- k^2x + ২kx^2 - x^3} \\ 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} k^3 - ৩k^2x + ৩kx^2 - x^3 \\ k^3 - ২k^2x + kx^2 \end{array} \right) (k - x)$$

এখানে ভাজ্য হইতে ভাজক k গুণ লইয়া যাক বাকী থাকে তাহা হইতে পুনরায় $-x$ গুণ লওয়াতে কিছুই বাকী বহিল না, অতএব ভাগফল, $k - x$ ।

ইহাব প্রমাণ । $(k^2 - ২kx + x^2) \times (k - x)$

$$= k^3 - ৩k^2x + ৩kx^2 - x^3।$$

(২) উদাহরণ । $k^3 + ৪k^2x + ৪kx^2 + x^3$ ইহাকে

$k^3 + ২kx + x^3$ দিয়া ভাগ কর।

$$\begin{array}{r} k^3 + ৪k^2x + ৪kx^2 + x^3 \\ \underline{k^3 + ২k^2x + kx^2} \\ ২k^2x + ৩kx^2 + x^3 \\ \underline{২k^2x + ৪kx^2 + ২x^3} \\ - kx^2 - x^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} k^3 + ৪k^2x + ৪kx^2 + x^3 \\ k^3 + ২k^2x + kx^2 \end{array} \right) (k + ২x)$$

অতএব সম্পূর্ণ ভাগফল = $k + ২x - \frac{kx^2 + x^3}{k^2 + ২kx + x^2}$ ।

প্রমাণ । $(k^2 + ২kx + x^2) \times (k + ২x - \frac{kx^2 + x^3}{k^2 + ২kx + x^2})$

$$= (k^2 + ২kx + x^2) \times (k + ২x + \frac{kx^2 + x^3}{k^2 + ২kx + x^2})$$

$$= (k^2 + ২kx + x^2) \times (k + ২x)$$

$$+ (k^2 + ২kx + x^2) \times \frac{k^2x + ২kx^2 + x^3 - kx^2 - x^3}{k^2 + ২kx + x^2}$$

$$= k^3 + ৩k^2x + ৩kx^2 + x^3 + k^2x + kx^2$$

$$- k^3 + ৪k^2x + ৪kx^2 + x^3।$$

তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।

বন্ধনী ।

২৯ । বন্ধনো প্রয়োগ ও মোচন বীজগণিতেব বিশেষ প্রয়োজনীয় প্রক্রিয়া ।

পাটীগণিতে বলা হইয়াছে (৯ ধারা দ্রষ্টব্য)

বন্ধনোব অন্তর্গত রাশিগুলির পবম্পবসম্বন্ধীয় ক্রিয়া অগ্রে সম্পন্ন কবিত্তে হয়, এবং বন্ধনৌক অন্তর্গত রাশিগুলিকে একটি রাশি মনে কবিত্তে হয় ।

অর্থাৎ দৃশ্যতঃ অনেক হইলে এবং কার্যতঃ একই হইলে সেইরূপ অনেকগুলি রাশিব একতা প্রদর্শনার্থে বন্ধনো প্রয়োগ একটি সুন্দর উপায় ।

যথা, যদি ক হইতে $x + g$ অথবা $x - g$ এই যোগ ফল বা বিরোগফল এর নিতে হয়, তাহা হইলে যাহা বাকী থাকে,

তাহা = ক - (x + g) অথবা = ক - (x - g) এইরূপ লিখিত হইতে পাবে ।

অথবা কস^২ + গস + গস + ঘ ইহাকে

স'ব শক্তিক্রমে সাজাইলে

$$কস^2 + (x + g) স + ঘ$$

এরূপে লেখা যাইতে পাবে ।

এইরূপ অস্ত্রান্ত অনেক স্থলে বন্ধনো প্রয়োগ দ্বারা রাশিমালাকে সুবিধাজনক আকারে লেখা যাইতে পারে ।

৩০ । বন্ধনো প্রয়োগ সম্বন্ধে প্রধানতঃ এই কয়েকটি বিষয় বিবেচ্য ।—

(১) চিহ্ন সম্বন্ধীয় অর্থাৎ পদগুলিব ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

(২) শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

(৩) অক্ষরবিস্তার সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

(৪) বন্ধনোব মধ্যে বন্ধনোপ্রয়োগ সম্বন্ধীয় নিয়ম ।

৩১ । প্রথমতঃ বন্ধনোব পদের চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম ।
পূর্বেই এই নিয়মের এক প্রকার আভাস দেওয়া হইয়াছে । (১২ ধারা দ্রষ্টব্য) । সে নিয়ম এই—

যদি বন্ধনোর পূর্বে + ধনচিহ্ন থাকে তবে যে সকল পদ বন্ধনোব অন্তর্গত

করা যাইবে তাহাদের প্রত্যেকের পূর্বেচিহ্ন বজায় থাকিবে। যদি বন্ধনীর পূর্বে —ঋণচিহ্ন থাকে তবে যে সকল পদ বন্ধনীর অন্তর্গত করা যাইবে তাহাদের প্রত্যেকেবই চিহ্নের পরিবর্তে তদবিপরীত চিহ্ন বসিবে।

$$\text{যথা } ক + খ - গ - ঘ + ঙ$$

$$= ক + (খ - গ - ঘ + ঙ) \quad (১)$$

$$= ক + খ - (গ + ঘ - ঙ) \quad (২)$$

$$\text{কারণ } ক + (খ - গ - ঘ + ঙ) = ক + খ - গ - ঘ + ঙ$$

$$\text{এবং } ক + খ - (গ + ঘ - ঙ) = ক + খ - গ - ঘ + ঙ।$$

$$(১১ \text{ ও } ১২ \text{ ধারা দ্রষ্টব্য।})$$

৩০। দ্বিতীয়তঃ বন্ধনী প্রয়োগে শক্তিসূচক সম্বন্ধীকৃত নিয়ম।

শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় মূল সূত্র এটি (১০ ধারা দ্রষ্টব্য) —

$$ক^n \times ক^m = ক^{n+m} \quad (১)$$

এবং ভগ্নসম্বন্ধে আব ৩টি নিয়ম এটি (১৬, ১৭ ধারা দ্রষ্টব্য) —

$$ক^{-n} = \frac{১}{ক^n} \quad \dots \quad (২)$$

$$ক^0 = ১ \quad (৩)$$

এ স্থলে n ও m ধনরাশি বা ঋণবাশি হইতে পারে, কিন্তু তাহারা অথও বাশি ইহা মানিয়া লওয়া হইয়াছে।

শক্তিসূচকের আব একটি নিয়ম আছে, তাহা এটি —

$$(ক^n)^m = ক^{nm} \quad (৪)$$

$$\text{কারণ } (ক^n)^m = ক^n \times ক^n \times ক^n \times \dots \quad (m \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যায়ে})$$

$$= ক^{n+n+n+\dots} \quad (m \text{ সংখ্যক পদ পর্যায়ে})$$

$$= ক^{nm}।$$

উপরেব (১), (২), (৩), (৪) এই চারিটি সাম্য মনে রাখিলেই শক্তিসূচক সম্বন্ধে বন্ধনী প্রয়োগেব কার্য্য চলিবে।

$$\begin{aligned}
 & \text{যথা, } ক^৩স^৩ + ক^২স^৩ + কস^৩ + থ^৩স + থস + গ \\
 & = (ক^৩ + ক^২ + ক) কস^২ + (থ^৩ + থ) থস + গ। \\
 & = (ক^৩ + ক + ১) কস^২ + (থ + ১) থস + গ। \\
 & \quad ক^৩থ^৩ + ২ক^২থ^৩গ^২ + গ^৩ \\
 & = (ক^২থ^৩)^২ + ২ক^২থ^৩গ^২ + (গ^৩)^২ \\
 & = (ক^২থ^৩ + গ^৩)^২।
 \end{aligned}$$

৩৩। তৃতীয়তঃ বন্ধনী প্রয়োগে অক্ষর লিখ্যাস সম্বন্ধীয় নিয়ম।

অক্ষর বিভাগসেব কোন ধবা বাধা নিয়ম নাই।

কোন বহুপদ রাশিমালাকে এক আকাব হইতে অল্প আকাবে পরিবর্তিত করিলে হইলে প্রত্যেক স্থলে নূতন নিয়ম অবলম্বন করিতে হয়, এবং সেট সকল নিয়ম কেবল অভ্যাসেব দ্বাৰা জানা যায়।

নিম্নেব উদাহরণ দৃষ্টে এই কথা স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে।

(১) উদাহরণ। $১৬ক^৩থ^৩ - ২০ক^২থ^৩ + ৪ক^২থ^২$ ইহাকে দুইটি ত্রিপদ উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট কব।

$$\begin{aligned}
 & ১৬ক^৩থ^৩ - ২০ক^২থ^৩ + ৪ক^২থ^২ \\
 & = ৪ক^২থ^২(৪ক^২থ^৩ - ৫ক^২থ^২ + ১) \\
 & = ৪ক^২থ^২(৪ক^২থ^৩ - ৪ক^২থ^২ + ১ - ক^২থ^২) \\
 & = ৪ক^২থ^২\{ (২ক^২থ^২)^২ - ৪ক^২থ^২ + ১ - (ক^২থ^২) \} \\
 & = ৪ক^২থ^২\{ (২ক^২থ^২ + ১)^২ - (ক^২থ^২) \} \\
 & = ৪ক^২থ^২(২ক^২থ^৩ + ১ + ক^২থ^২)(২ক^২থ^২ + ১ - ক^২থ^২) \\
 & = ৪ক^২থ^২(২ক^২থ^৩ + ক^২থ^২ + ১)(২ক^২থ^২ - ক^২থ^২ + ১)।
 \end{aligned}$$

(২) উদাহরণ। $ক^৩ + থ^৩গ^৩ - ৩ক^২থ^২গ$ ইহাকে $ক + থ + গ$ দ্বারা ভাগ কর।

ক'এ শক্তি ক্রম সাজাইলে প্রক্রিয়া একরূপ হয় .—

$$\begin{aligned}
 & \text{ক} + \text{খ} - \text{গ} \quad \left(\text{ক}^2 - \text{ওকথগ} + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 \right) \left(\text{ক}^2 - \text{কথ} - \text{কগ} - \text{খগ} + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 \right) \\
 & \quad \underline{\text{ক}^2 + \text{ক}^2 \text{খ} + \text{ক}^2 \text{গ}} \\
 & \quad - \text{ক}^2 \text{খ} - \text{ক}^2 \text{গ} - \text{ওকথগ} \\
 & \quad - \text{ক}^2 \text{খ} - \text{কথ}^2 - \text{কথগ} \\
 & \quad \underline{- \text{ক}^2 \text{গ} - \text{ওকথগ} + \text{কথ}^2} \\
 & \quad - \text{ক}^2 \text{গ} - \text{কথগ} - \text{কগ}^2 \\
 & \quad \underline{- \text{কথগ} + \text{কথ}^2 + \text{বগ}} \\
 & \quad - \text{বগগ} - \text{খ}^2 \text{গ} - \text{খগ}^2 \\
 & \quad \underline{\text{কথ}^2 - \text{কগ}^2 + \text{খ}^2 \text{গ} + \text{খগ}^2 + \text{খ}^2 + \text{খ}^2} \\
 & \quad \text{কথ}^2 \quad \quad \quad + \text{খ}^2 \text{গ} \quad \quad \quad + \text{খ}^2 \\
 & \quad \underline{\text{কগ}^2 + \text{খগ}^2 + \text{গ}^2} \\
 & \quad \underline{\text{কগ}^2 + \text{খগ}^2 + \text{গ}^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ভাগফল} = \text{ক}^2 + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 - \text{কথ} - \text{খগ} - \text{গক}$$

এইবার দেখা যাউক বন্ধনী প্রয়োগে প্রক্রিয়া বিরূপ হয়

$$\begin{aligned}
 & \text{ক} + (\text{খ} + \text{গ}) \quad \left(\text{ক}^2 - \text{ওকথগ} + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 \right) \left(\text{ক}^2 - (\text{খ} + \text{গ})\text{ক} + (\text{খ}^2 - \text{খগ} + \text{গ}^2) \right) \\
 & \quad \underline{\text{ক}^2 + (\text{খ} + \text{গ}) \text{ক}} \\
 & \quad - (\text{খ} + \text{গ}) \text{ক}^2 - \text{ওকথগ} \\
 & \quad - (\text{খ} + \text{গ}) \text{ক}^2 - (\text{খ} + \text{গ}) \text{ক} \\
 & \quad (\text{খ}^2 - \text{খগ} + \text{গ}^2) \text{ক} + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 \\
 & \quad (\text{খ}^2 - \text{খগ} + \text{গ}^2) \text{ক} + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 \\
 & \quad \underline{(\text{২২ ধারাব } \& \text{ উদাহরণ দ্রষ্টব্য})}
 \end{aligned}$$

$$\text{ভাগফল} = \text{ক}^2 + \text{খ}^2 + \text{গ}^2 - \text{কথ} - \text{খগ} - \text{গক} ।$$

উপরেব এই দুইটি ভাগপ্রক্রিয়া তুলনা কবিয়া দেখিলেই বন্ধনী-প্রয়োগব সুবিধা স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে ।

-৬। চতুর্থতঃ বন্ধনীর মধ্যে বন্ধনী প্রয়োগ সম্বন্ধীয় নিয়ম।

উপরে ৩১ ও ৩২ বাবার অর্থাৎ ত্রিগুণ ও শক্তিসূচকের নিয়মেব প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া, প্রয়োগ কালে সৰ্ব্বাগ্রে সৰ্ব্বাপেক্ষা অধিক ব্যাপক বন্ধনী, তদনন্তর অপেক্ষাকৃত অল্পব্যাপক বন্ধনী, তৎপরে তদপেক্ষা অল্পতর ব্যাপক বন্ধনীর প্রয়োগ করিবে। এবং বন্ধনীমোচন কালে তদবিপরীত ক্রম অবলম্বন করিবে।

এই নিয়মেব অর্থ ও কাণ্ডা নিম্নেব উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

১) উদাহরণ। কখগ-কঘস-খশস+শঘস
+বশস-ঘস+গশঘস

ইহাতে বন্ধনী প্রয়োগ কব।

কখগ-কঘস-খশস+শঘস+কশস-খঘস+গশঘস

- কখগ-[কঘ+খশ-শঘ-বশ+খঘ-গশঘ] স

- কখগ-[{ক+খ-গশ-খ} ঘ-(ক-গ)শ] স।

২) উদাহরণ। ক-খ-গ)-[ক-খ-গ-১
{খ+গ-৩(গ-ক)-ঘ}]

ইহাব বন্ধনীমোচন কব।

ক-(খ-গ)-[ক-খ-গ-২{খ+গ-৩(গ-ক)-ঘ}]

= ক-খ+গ-[ক-খ-গ-২{খ+গ-৩গ+৩ক-ঘ}]

= ক-খ+গ-[ক-খ-গ-২খ-২গ+৩গ-৬ক+২ঘ]

= ৬ক+২খ-২গ-২ঘ।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ ।

বিবিধ সাক্ষেতিক বাক্য ও উৎপাদক বিশ্লেষ ।

৩৫। সহজেই দেখা বাইতেছে

$$ক + খ = খ + ক \quad (১)$$

এবং দেখা গিয়াছে (পাটীগণিতের ৩৩ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$ক \times খ = খ \times ক \quad (২)$$

কিন্তু $ক - খ \neq খ - ক$,

$$\text{তবে } ক - খ = -(খ - ক) \quad (৩)$$

কাবণ, $-(খ - ক) = (ক - খ)$ (১১ ধারা দ্রষ্টব্য)এবং $ক - খ \neq খ - ক$,

$$\left. \begin{aligned} \text{তবে } ক - খ &= ১ \div (খ - ক) \\ \text{অর্থাৎ } \frac{ক}{খ} &= \frac{১}{\frac{খ}{ক}} \end{aligned} \right\} \quad (৪)$$

কাবণ $(ক - খ) \times খ = ক$,

$$\{(ক - খ) \times খ\} \div ক = ক \div ক = ১,$$

অর্থাৎ $(ক \div খ) \times খ \div ক = ১$ ।

$$\therefore ক \div খ = ১ - (খ \div ক),$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{ক}{খ} = \frac{১}{\frac{খ}{ক}} \quad ।$$

৩৬। পূর্বে দেখা গিয়াছে (২৩ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$\frac{ক^২ - খ^২}{ক + খ} = \frac{(ক + খ)(ক - খ)}{ক + খ} = ক - খ,$$

$$\text{এবং } \frac{ক^২ - খ^২}{ক - খ} = \frac{(ক + খ)(ক - খ)}{ক - খ} = ক + খ,$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{ক^২ - খ^২}{ক \pm খ} = ক \mp খ \quad ।$$

$$\text{সেইরূপে } \frac{k^2 - x^2}{k \pm x} = \frac{(k^2)^2 - (x^2)^2}{k \pm x} = \frac{(k^2 - x^2)(k^2 + x^2)}{k \pm x} \\ = (k \mp x)(k^2 + x^2)।$$

$$\text{কিন্তু } \frac{k^2 + x^2}{k \pm x} = \frac{k^2 - x^2 + 2x^2}{k \pm x} = \frac{k^2 - x^2}{k \pm x} + \frac{2x^2}{k \pm x} \\ = k \mp x + \frac{2x^2}{k \pm x}।$$

অর্থাৎ $k^2 + x^2$ এই দ্বিপদ $k \pm x$ দ্বারা ভাজ্য নহে।

$$\text{এবং } \frac{k^2 + x^2}{k + x} = k^2 - kx + x^2,$$

$$\text{ও } \frac{k^2 - x^2}{k - x} = k^2 + kx + x^2।$$

এক্রমে দেখা যাউক $k^n \pm x^n$ এই দ্বিপদ $k \pm x$ দ্বারা বিভাজ্য কি না।

এস্থলে ন অথগু ধনবাশি বলিয়া মানিয়া লওয়া গেল।

৩৭। যদি ন অগু ধনবাশি হয়, তাহা হইলে ভাগপ্রক্রিয়া দ্বারা দেখা

যাউতে গছে—

(১)

$$\begin{aligned} (k - x) \frac{k^n - x^n}{k^n - k^{n-1}x} &= \left(\frac{k^n - x^n}{k^n - k^{n-1}x} \right) (k^n - k^{n-1}x) \\ &= \frac{k^n - k^{n-1}x}{k^n - k^{n-1}x} (k^n - k^{n-1}x) \\ &= \frac{k^n - k^{n-1}x - k^n + k^{n-1}x}{k^n - k^{n-1}x} = 0 \\ &= \frac{k^n - k^{n-1}x - k^n + k^{n-1}x}{k^n - k^{n-1}x} = 0 \end{aligned}$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে সর্বশেষ আংশিক ভাজ্য $(k - x)x^{n-1}$ হইবে, ও তাহা $(k - x)$ দ্বারা বিভাজ্য, এবং ভাগফলের শেষ পদ x^{n-1} হইবে।

যদি n যুগ্ম চষ তাহা হইলে

$$\frac{k^n - \theta^n}{k + \theta} = k^{n-1} - k^{n-2}\theta + k^{n-3}\theta^2 - \dots - k\theta^{n-2} - \theta^{n-1}$$

এবং $k^n - \theta^n$ এই দ্বিপদ $(k + \theta)$ দ্বারা বিভাজ্য ।

যদি n অযুগ্ম হয়, তাহা হইলে

$k^n - \theta^n$ এই দ্বিপদ $(k + \theta)$ দ্বারা বিভাজ্য নহে ।

(৩)

$$(k + \theta) k^{n-1} + \theta^n (k^{n-1} - k^{n-2}\theta + k^{n-3}\theta^2 - \dots - k\theta^{n-2} - \theta^{n-1})$$

$$\frac{k^n + \theta^n - \theta^n}{k + \theta}$$

$$= k^{n-1} + \theta^n - (k^{n-1} - k^{n-2}\theta + k^{n-3}\theta^2 - \dots - k\theta^{n-2} - \theta^{n-1})$$

$$= \frac{k^n - \theta^n + k^n - \theta^n}{k + \theta}$$

$$= \frac{(k^n - \theta^n + k^n - \theta^n)}{k + \theta}$$

$$= \frac{k^n - \theta^n + k^n - \theta^n}{k + \theta}$$

$$= \frac{k^n - \theta^n + k^n - \theta^n}{k + \theta}$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে আংশিক ভাজ্য k^n

$$= (k^{n-1} - \theta^{n-1})\theta, (k^{n-1} - \theta^{n-2})\theta^2$$

$$- (k^{n-3} - \theta^{n-3})\theta^3 \text{ ইত্যাদি ।}$$

যদি n অযুগ্ম হয়, তবে $n-2$, $n-4$ ইত্যাদি অযুগ্ম এবং $n-1$, $n-3$

ইত্যাদি যুগ্ম বাশি হইবে, এবং শেষে $(k + \theta)\theta^{n-1}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হওয়া যাইবে ও তাহা $(k + \theta)$ দ্বারা বিভাজ্য ।

কিন্তু যদি n যুগ্মবাশি হয় তাহা হইলে $n-১$, $n-৪$ ইত্যাদি যুগ্ম হইবে, ও $n-১$, $n-৩$ ইত্যাদি অযুগ্ম হইবে, এবং শেষে $-(k-x)x^{n-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হইতে হইবে ও তাহা $(k+x)$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

∴ যদি n অযুগ্ম হয় তাহা হইলে

$$\frac{k^n + x^n}{k+x} = k^{n-১} - k^{n-২}x + k^{n-৩}x^2 - \dots - kx^{n-২} + x^{n-১},$$

যদি n যুগ্ম হয় তাহা হইলে

$k^n + x^n$ এই দ্বিপদ $(k+x)$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

(৪)

$$\begin{aligned} & (k-x)k^n + x^n (k^{n-১} + k^{n-২}x + \\ & \quad \frac{k^n - k^{n-১}x}{k^{n-১}x + x^n} = (k^{n-১} + x^{n+১})x \\ & \quad \frac{k^{n-১}x - k^{n-২}x^2}{(k^{n-২} + x^{n-২})x^2} \end{aligned}$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা বাইতেছে n যুগ্মই হউক আব অযুগ্মই হউক, শেষে $(k+x)x^{n-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হইব, এবং তাহা $(k-x)$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপরেব চারিটি কথা মনে রাখা আবশ্যক।

৩৮। গুণন দ্বারা দেখা বাইতেছে

$$\begin{aligned} (s+k)(s+x) &= s^2 + (k+x)s + kx, \\ (s+k)(s+x)(s+g) &= s^3 + (k+x+g)s^2 + (kx+kg+gx)s \\ &+ kxg. \end{aligned}$$

$$(ক + খ + গ + ঘ)^২ = ক^২ + খ^২ + গ^২ + ঘ^২ + ২ক(খ + গ + ঘ) \\ + ২খ(গ + ঘ) + ২গঘ ।$$

$$(স^২ + কস + ক^২) (স^২ - কস + ক^২) \\ = \{ (স^২ + ক^২) + কস \} \{ (স^২ + ক^২) - কস \} \\ = (স^২ + ক^২)^২ - ক^২স^২ \\ = স^৪ + ২ক^২স^২ + ক^৪ - ক^২স^২ \\ = স^৪ + ক^২স^২ + ক^৪ ।$$

৬৯। যদি কোন তিনটি অক্ষর, ক, খ, গ, চক্রাকারে অর্থাৎ একটি বৃত্তের উপর ক্রমান্বয়ে লেখা যায়, তাহাদেব সেই ক্রমান্বয়ে যে কোন বিস্তারকে **চক্রবিন্যাস** বা **চক্রবাল** বলা যায়।

যথা, ক + খ + গ,

ক + খ, খ + গ, গ + ক,

ক - খ, খ - গ, গ - ক,

কখ, খগ, গক,

ক^২(খ + গ) + খ^২(গ + ক) + গ^২(ক + খ),

ক, খ, গ'ব চক্রবিন্যাস।

কিন্তু, ক + খ, ক + গ, খ + গ,

অথবা কখ, কগ, খগ

ক, খ, গ'ব চক্রবিন্যাস নহে।



চক্রবিন্যাসে সম্বন্ধ অক্ষরত্রয়েব বাশিমালাব কতকগুলি সাঙ্কেতিক বাক্য মনে বাথা আবশ্যক।

তাহা নিম্নের ধারায় প্রদর্শিত হইতেছে।

$$৪০। (১) (ক + খ + গ) (কখ + খগ + গক) - কখগ \\ = (ক + খ) (খ + গ) (গ + ক) ।$$

$$\begin{aligned}
 & 'ବ + ଥ + ଗ' (ବଥ + ଥଗ + ଗକ) - ବଥଗ \\
 & = (କ + ଧ) (କଥ + ଥଗ + ଗବ) + ଗ(ବଥ + ଥଗ + ଗକ - ବଥ) \\
 & = (କ + ଧ) \{ ବ(ଥ + ଗ) + ଥଗ \} + ଗ(ବଥ + ଗକ) \\
 & = (କ + ଧ) \{ କ(ଥ + ଗ) + ଥଗ \} + ଗ(ବଥ + ଗ) \\
 & = (କ + ଧ) \{ କ(ଥ + ଗ) + ଗ(ଥ + ଗ) \} \\
 & = (କ + ଧ) (ଥ + ଗ) (ଗ + ବ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ୨) & ବ (ଥ + ଗ) + ଧ (ଗ + ବ) + ଗ (ବ + ଧ + ବଥ) \\
 & = (ବ + ଧ) (ଥ + ଗ) (ଗ + ବ) \\
 & = (ବ + ଧ + ଗ) + ଧ (ଗ + ବ + ଗ) (କ + ଧ) + କଥଗ \\
 & = କ(ଥ + ଗ) + ବ(ଥ + ଗ) + ଧ(ଗ + ବ) + ଧ(ଗ + ବ) + ଧ(ଗ + ବ) \\
 & = ବ (ଥ + ଗ) + ବ(ଥ + ଗ) + ଧ(ଗ + ବ) \\
 & = (ଧ + ଗ) \{ କ + ବଥ + ଥଗ + ଥଗ \} \\
 & = (ଧ + ଗ) \{ ବ(କ + ଗ) + ଗ(ବ + ଥ) \} \\
 & = (କ + ଧ) (ଥ + ଗ) (ଗ + ବ) ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ୩) & କ (ଥ + ଗ) + ଧ (ଗ + ବ) + ଗ (ବ + ଧ) + ଥବଥ \\
 & = (ବ + ଧ + ଗ) (ବଥ + ଥଗ + ଗବ) \\
 & = (ବ + ଧ + ଗ) (ବଗ + ଥଗ + ଗବ) \\
 & = ବ(କ + ଗବ) - ବଥଗ \\
 & + ଧ(ବଥ + ଥଗ) + ବଥ \\
 & + ଗ(ଥଗ + ଗକ) + କଥଗ \\
 & = କ(ଥ + ଗ) + ଧ(ଗ + ବ) + ଗ(କ + ଧ) + ଥବଥ ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ୪) & (କ + ଧ + ଗ) = କ + ଧ + ଗ + ଧ(କ + ଧ) (ଥ + ଗ) (ଗ + ବ) । \\
 & (ବ + ଧ + ଗ) = \{ (କ + ଧ) + ଗ \} \\
 & = (ବ + ଧ) + ଗ + ଧ(କ + ଧ) (କ + ଧ + ଗ) \\
 & = କ + ଧ + ଗ + ଧ(କ + ଧ) (କ + ଧ) + ଧ(କ + ଧ) (କ + ଧ + ଗ) \\
 & = କ + ଧ + ଗ + ଧ(ବ + ଧ) \{ କ(ଥ + ଗ) + ଗ(ଥ + ଗ) \} \\
 & = ବ + ଧ + ଗ + ଧ(କ + ଧ) (ଥ + ଗ) (ଗ + ବ) ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ৫) ক^-(খ-গ) + খ^-(গ-ক) + গ^-(ক-খ), \\ & = -(ক-খ)(খ-গ)(গ-ক)। \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ক^২(খ-গ) + খ^-(গ-ক) + গ^-(ক-খ), \\ & = ক^২(খ-গ) - কখ + কগ + গ^২ - গখ \\ & = ক^২(২-গ) - ক(খ-গ) + গ(গ-খ) \\ & = (খ-গ){ক^২ - ক(খ+গ) + গ^২} \\ & = (খ-গ){ক(ক-খ) - গ(ক-খ)} \\ & = -(ক-খ)(খ-গ)(গ-ক)। \end{aligned}$$

৪১। উপরেব ২৩, ৩৭, ৩৮, ও ৪০ ধাব্য প্রদর্শিত সাঙ্কেতিক বাঁকা ধাব্য অনেক স্থলে ত্রিপদ, ত্রিপদ ও বহুপদ বাশিব উৎপাদক বিশ্লেষণ হইতে পাবে।

বীজগণিতে সাধারণ গুণনাবক ও গুণিতক নির্ণয়ার্থে বাশিদিগেব উৎপাদক বিশ্লেষণ আবশ্যিক। অতএব ত্রিপদ বাশিব দ্বিপদ উৎপাদক নির্ণয়েব কএকটি বিশেষ নিয়ম এই স্থানে প্রদর্শিত হইতেছে।

২০। গুণন ধাব্য দেয়া যায়,

$$স + ক) (স + খ) = স^২ + (ক + খ) স + কখ \quad (১)$$

$$(স - ক) (স - খ) = স^২ - (ক + খ) স + কখ \quad (২)$$

$$(স + ক) (স - খ) = স^২ + (ক - খ) স - কখ \quad (৩)$$

$$স - ক) (স + খ) = স^২ - (ক - খ) স - কখ \quad (৪)$$

অতএব এই চাবিটি সামোব যে কোনটিব দক্ষিণেব আকাবেব ত্রিপদের দ্বিপদ উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় কবিতে হইলে দেখিতে হইবে ত্রিপদের শেষ পদ + চিহ্নযুক্ত হইলে উৎপাদকদ্বয়ের দ্বিতীয় পদ উভয়েই ধনবাশি অথবা উভয়েই ঋণবাশি হইবে, ও তাহাদের যোগফল ত্রিপদের দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি হইবে। এবং ত্রিপদের শেষ পদ - চিহ্নযুক্ত হইলে উৎপাদকদ্বয়ের একটিব শেষ পদ ধনবাশি অপবটিব শেষ পদ ঋণবাশি হইবে, এবং তাহাদের বিয়োগফল ত্রিপদের দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি হইবে।

$$\text{যথা, } s^2 + ৮s + ১৫ = (s + ৫)(s + ৩),$$

$$s^2 - ৯s + ১৪ = (s - ৭)(s - ২),$$

$$s^2 + ৫s - ১৪ = (s + ৭)(s - ২),$$

$$s^2 - ৫s - ১৪ = (s - ৭)(s + ২)।$$

৪৩। অনুমান দ্বারা এইরূপে উৎপাদক নির্ণয় সর্বত্র সুবিধাজনক না হইতে পারে। এই ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত নিয়মটি কখন কখন অবলম্বন করা যাইতে পারে।

মনে কর ত্রিপদটি এই, $s^2 + ps + q$,

$$\text{তাহা হইলে } s^2 + ps + q = s^2 + ps + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(s + \frac{p}{2}\right)^2 - \left\{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right\} = \left(s + \frac{p}{2}\right)^2 - \left\{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}^2 \\ &= \left\{s + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} \\ &\quad \times \left\{s + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}। \end{aligned}$$

কিন্তু $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ সম্পূর্ণ বর্গরূপিণী না হইলে তাহাব বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ সহজে নির্ণয় করা যায় না, এবং উৎপাদক সহজ আকারে বের হয় না।

উপরে ৪২ ধারার প্রথম উদাহরণটি লইলে দেখা যায়, $p = ৮$, $q = ১৫$,

$$\therefore \left(\frac{p}{2}\right)^2 = ১৬, \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = ১।$$

$$\begin{aligned} \therefore s^2 + ৮s + ১৫ &= (s + ৪ + ১)(s + ৪ - ১) \\ &= (s + ৫)(s + ৩)। \end{aligned}$$

৪৪। যদি ত্রিপদটি $চস^২ + ছস + জ$ এই আকারে হয়, তাহা হইলে যখন $চস^২ + ছস + জ = চ \left(স^২ + \frac{ছ}{চ}স + \frac{জ}{চ} \right)$, তখন সেই ত্রিপদকে শেষোক্ত আকারে আনিয়া, ৪২, ৪৩ এবাব নিয়মানুসারে $স^২ + \frac{ছ}{চ}স + \frac{জ}{চ}$ ইহাব উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় করিয়া, তাহাব কোন একটিকে চ দ্বারা গুণ করিলেই ইষ্ট উৎপাদকদ্বয় পাওয়া যাইবে।

$$\text{যথা, } ৩স^২ + ১৪স - ৫ = ৩(স^২ + \frac{১৪}{৩}স - \frac{৫}{৩}) \\ = ৩(স + ৫)(স - \frac{১}{৩}) = (স + ৫)(৩স - ১)।$$

অথবা একপ স্থলে আব এক প্রণালী অবলম্বন করা যাইতে পারে।

$$\text{মনে কর } চস^২ + ছস + জ = (টস + ঠ) (ডস + ঢ)।$$

$$চস^২ + ছস + জ = (টস + ঠ) (ডস + ঢ) \\ = টডস^২ + (টঢ + ঠড)স + ঠঢ,$$

$$\text{এবং } চ = টড, ছ = টঢ + ঠড, জ = ঠঢ।$$

আব ট, ঠ, ড, ঢ এই শেষেব তিনটি সমীকরণ হইতে অহুমান করিয়া পাওয়া যাইতে পারে।

$$\text{উদাহরণ (১), } ১৪স^২ + ২৯স - ১৫ = (৭স - ৩) (২স + ৫),$$

$$\text{উদাহরণ (২), } ১৪স^২ - ২৯স - ১৫ = (৭স + ৩) (২স - ৫)।$$

$$\text{উদাহরণ (৩), } ৯স^২ - ৪৮স + ৬৪ = (৩স - ৮) (৩স - ৮) \\ = (৩স - ৮)^২।$$

৪৫। উপরে ৩৭ হইতে ৪৪ ধারায় যে সকল সাঙ্কেতিক বাক্যেব উল্লেখ হইয়াছে, পাঠকেব সুবিধাব নিমিত্ত নিম্নে তাহা একত্র লিপিবদ্ধ করা গেল। সেগুলি মনে রাখা আবশ্যক।—

$$\frac{ক^n - খ^n}{ক - খ} = ক^{n-১} + ক^{n-২}খ + ক^{n-৩}খ^২ + \dots + কখ^{n-২} + খ^{n-১} \quad (১)$$

$$\frac{ক^n - খ^n}{ক + খ} = ক^{n-১} - ক^{n-২}খ + ক^{n-৩}খ^২ - \dots + কখ^{n-২} - খ^{n-১} \quad (২)$$

(যদি ন যুগ্ম হয়)

$$\frac{ক^n + খ^n}{ক + খ} = ক^{n-1} - ক^{n-2} খ + ক^{n-3} খ^2 - ক^{n-4} খ^3 + ক^{n-5} খ^4 - \dots + খ^{n-1} \quad (৩)$$

যদি n অযুগ্ম হয়)

$$(স + ক)(স + খ) = স^2 + (ক + খ)স + কখ \quad (৪)$$

$$স + ক)(স + খ)(স + গ) = স^3 + (ক + খ + গ)স^2 + (কখ + কগ + খগ)স + কখগ \quad (৫)$$

$$(ক + খ + গ + ঘ)^3 = ক^3 + খ^3 + গ^3 + ঘ^3 + ৩ক(খ + গ + ঘ) + ৩খ(গ + ঘ) + ৩গঘ + ৩ঘগ \quad (৬)$$

$$স^3 + ক^3 = (স + ক)(স^2 - স্ক + ক^2) \quad (৭)$$

$$(ক + খ)(খ + গ)(গ + ঘ) = (ক + খ + গ)(কখ + খগ + গক) - কখগ \quad (৮)$$

$$(ক + খ)(খ + গ)(গ + ক) = ক^2(খ + গ) + খ^2(গ + ক) + গ^2(ক + খ) + ২কখগ \quad (৯)$$

$$(ক + খ + গ)(কখ + খগ + গক) = ক(খ + গ) + খ(গ + ক) + গ(ক + খ) + ৩কখগ \quad (১০)$$

$$(ক + খ + গ)^3 = ক^3 + খ^3 + গ^3 + ৩ক(খ + গ)(গ + ক) \dots \quad (১১)$$

$$-(ক - খ)(খ - গ)(গ - ক) = ক^2(খ - গ) + খ^2(গ - ক) + গ^2(ক - খ) \dots \quad (১২)$$

$$(স + ক)(স + খ) = স^2 + (ক + খ)স + কখ \dots \quad (১৩)$$

$$(স - ক)(স - খ) = স^2 - (ক + খ)স + কখ \dots \quad (১৪)$$

$$(স + ক)(স - খ) = স^2 + (ক - খ)স - কখ \dots \quad (১৫)$$

$$(স - ক)(স + খ) = স^2 - (ক - খ)স - কখ \dots \quad (১৬)$$

$$স^2 + পস + ক = \left\{ স + \frac{প}{২} + \sqrt{\frac{প^2}{৪} - ক} \right\} \times \left\{ স + \frac{প}{২} - \sqrt{\frac{প^2}{৪} - ক} \right\} \dots (১৭)$$

$$৮স^2 + ৬ন + ৯ = (৮স + ৪)(৮স + ৫) = ৮৮স^2 + (৮৫ + ৪৮)স + ৪৫ \dots \quad (১৮)$$

যদি $৮৮ = ৮$, $(৮৫ + ৪৮) = ৬$, $৪৫ = ৯$ ।

২। উদাহরণমালা।

১। (১) $k^2 + ৭^2 + ৭^2 + ৭k + ৭k - ৭k$ ইত্যাকে $k + ৭ + ৭$ দ্বিগুণ কব।

(২) $১ - s + s^2 - s^3$ ইত্যাকে $১ + s + s^2 + s^3$ দ্বিগুণ কব।

(৩) $k^2 + ২৭^2 + ২৭^2 - ২৭k + ২৭k - ২৭k$ ইত্যাকে $k + ২৭ - ২৭$ দ্বিগুণ কব।

২। (১) $৬k^2 - ১৭k^2 + ৭k^2 - ৫k^2$ ইত্যাকে $২k - ৫k$ দ্বিগুণ ভাগ কব।

(২) $s - s^2 + s^3 - s^4 + s^5 - s^6$ ইত্যাকে $s^2 - s^3$ দ্বিগুণ ভাগ কব।

(৩) $s^2 + s^3 - ৩s^2 - ৩s^3 + ৫s^2$ ইত্যাকে $s^2 + ২s - ৩$ দ্বিগুণ ভাগ কব।

৩। (১) $৩k - [k + ৭ - ২\{k + ৭ + ৭ - (k - ৭ + ৭ - s)\}] + k$ ইত্যাক বন্ধনী মোচন কব।

(২) $৩[k + ৭ + ৭ - ৩\{৭ + ৭ - ৪(৭ - k)\}]$ ইত্যাক বন্ধনী মোচন কব।

(৩) $k^2 + ৭s + ৭ - \{ks^2 - (ks - ৭)\} + \{ks^2 - (ks - ৭)\}$ ইত্যাক বন্ধনী মোচন করিয়া s এবং শক্তিসূচকক্রমে পুনরায়

বন্ধনীপ্রয়োগ কব।

(৪) $k^2s^2 + ২ks^2 - ৭^2s^2 - ২৭ks^2 - ৭ks^2 + k^2s^2$ ইত্যাকে s এবং শক্তিসূচক অনুসারে সাজাও।

৪। নিম্নলিখিত চারটি ভাগফল নির্ণয় কব—

(১) $(k^2 + ৭^2) - (k^2 + ৭^2)$ ।

(২) $(k^2 - ৭^2) - (k^2 - ৭^2)$ ।

(৩) $(k^2 - ৭^2) - (k^2 - ৭^2)$ ।

(৪) $(k^2 - ৭^2) \div (k + ৭)$ ।

৫। নিম্নলিখিত চাৰিটি সাম্য সপ্রমাণ কৰ—

$$(১) \quad ক^২(খ+গ)+খ^২(গ+ক)+গ^২(ক+খ)$$

$$= ক(খ^২+গ^২)+খ(গ^২+ক^২)+গ(ক^২+খ^২)।$$

$$(২) \quad (ক+খ)^২+(খ+গ)^২+(গ+ক)^২=(ক+খ+গ)^২+ক^২+খ^২+গ^২$$

$$(৩) \quad (ক-খ)^২+(খ-গ)^২+(গ-ক)^২$$

$$= ২(ক-খ)(ক-গ)+২(খ-ক)(খ-গ)+২(গ-ক)(গ-খ)।$$

$$(৪) \quad ৮(ক+খ+গ)^৩-(ক+খ)^৩-(খ+গ)^৩-(গ+ক)^৩$$

$$= ৩(২ক+খ+গ)(ক+২খ+গ)(ক+খ+১গ)।$$

৬। নিম্নলিখিত সাতটি বাশিমালাৰ উৎপাদক বিশ্লেষ কৰ—

$$(১) \quad স^২+১৪স+৪৯। \quad (২) \quad ১২স^২+স-২০।$$

$$(৩) \quad ৮স^২+৬স-২৭। \quad (৪) \quad স^২-২স-১৫।$$

$$(৫) \quad ৩স^২+১৯স+২০। \quad (৬) \quad ক^৩+১৩ক^২+৪৯।$$

$$(৭) \quad ক^৩+৬ক(ক+২)+১৩।$$

তৃতীয় অধ্যায় ।

সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক ।

৪৬। সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক সম্বন্ধে পাটীগণিতের প্রথম অধ্যায়ের ষষ্ঠ পবিচ্ছেদে (৫৪ হইতে ৬৩ খাৰা দ্রষ্টব্য) যাহা বলা হইয়াছে, তাহার পুনরুক্তি এখানে নিম্নরোজন । গুণনীয়ক ও গুণিতক সম্বন্ধে বীজগণিতে তদতিবিক্ত যাহা এলা আবশ্যিক তাহাই এখানে বলা যাইবে ।

৪৭। চুট বা ততোধিক বাশিব সাধারণ অক্ষরের উচ্চতম শক্তিযুক্ত সাধারণ ভাজককে তাহাদের গরিষ্ঠ বা উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক বলে ।

বীজগণিতে পবিষ্ঠ অপেক্ষা উচ্চতম শব্দই অধিকতর সঙ্গত, কারণ অনেক স্থলে চুট বাশিব অক্ষর হিসাবে উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক তাহাদের সংখ্যা হিসাবে গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক অপেক্ষা ছোট হইতে পারে ।

যথা, $s^3 + 3s^2 + 3s + 1$,

এবং $s^3 + 1$,

এট দুইটি বাশি লইলে, দেখা যাইতেছে,

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s+1)(s+1)(s+1),$$

$$\text{এবং } s^3 + 1 = (s+1)(s^2 - s + 1)।$$

সুতরাং $s+1$ তাহাদের উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক ।

এবং যদি $s=৫$ হয়, তবে $s+1=৬$ ।

$$\text{কিন্তু তাহা হইলে } (s+1)^3 = 6^3 = ২১৬ = ১২ \times ১৮$$

$$\text{এবং } s^3 + 1 = ৫^3 + 1 = ১২৫ = ৭ \times ১৮,$$

সুতরাং উদাহরণের বাশিযয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক=১৮, যাহা ৬ অপেক্ষা অনেক বড় ।

ইহাও কাবণ এই যে উদাহরণের বাশিষ্যের অক্ষর হিসাবে $s+1$ অপেক্ষা উচ্চতর কোন ভাজক নাই, কেন না উভয় রাশিকে $s+1$ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল

$$(s+1)^2 \text{ এবং } s^2 - s + 1 \text{ হয়,}$$

এবং ইহাদেব অক্ষর হিসাবে কোন সাধাবণ ভাজক নাই ।

কিন্তু $s=৫$ হইলে ভাগফলদ্বয়ের মূল্য ৩৬ এবং ২১ হয়,

আর এই শেষোক্ত সংখ্যাৗয়ের একটি সাধাবণ ভাজক ৩ আছে ।

৪৮। বাশিগুলি একপদ হইলে তাহাদেব সাধাবণ গুণনীয়ক ও উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক সহজেই জানা যায় ।

যথা, ৬ ক^৩খ^২গ এবং ৮ ক^২খ^৩ঘ

ইহাদের সাধাবণ গুণনীয়ক কখ, ক^২খ^২, ১ ক^২খ প্রভৃতি এবং উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়ক ১ ক^৩খ^২ ।

৪৯। বাশিগুলি যদি দ্বিপদ বা বহুপদ হয়, তাহা হইলে তাহাদেব মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষ কবিয়া তন্মধ্যে যতগুলি সাধাবণ উৎপাদক থাকে তাহাদেব ক্রমান্বয়ে গুণ করিলে সেই গুণফল তাহাদেব উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়ক হইবে, ইহা স্পষ্ট বুঝা যায় ।

(১) উদাহরণ। $s^2 + ৩s + ৩s + ১$,

$$\text{এবং } (k+1)s^2 + ২(k+1)s + k+1,$$

এই দুই বাশির উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়ক নির্ণয় কর ।

$$s^2 + ৩s + ৩s + ১ = (s+1)(s+1)(s+1),$$

$$(k+1)s^2 + ২(k+1)s + k+1 = (k+1)(s+1)(s+1)।$$

∴ এই দুই রাশির সাধাবণ মৌলিক উৎপাদক $(s+1)$ ও $(s+1)$ ।

$$\therefore \text{ তাহাদের উ, সা, গ, } = (s+1)(s+1) = s^2 + ২s + ১।$$

(২) উদাহরণ। $s^2 + ২s + ২০$,

$$\text{এবং } s^2 + ৮s + ১৫,$$

এই দুই রাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর ।

$$s^2 + ২s + ২০ = (s+৪)(s+৫),$$

$$s^2 + ৮s + ১৫ = (s+৩)(s+৫)।$$

. এই দুই বাশির সাধারণ উৎপাদক কেবল $s + e$,

∴ তাহাদেব উ, সা, গ, $= s + e$ ।

কিন্তু অনেকপদ বাশির উৎপাদক বিশেষ সৰ্বত্র সহজ নহে । অতএব দুই বা ততোধিক অনেকপদ বাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের অল্প নিয়ম আবশ্যক, এবং তাহা নিম্নে দেওয়া যাইতেছে । সেই নিয়ম সপ্রমাণ কবুণাথে নিম্নের কথাটি অগ্রে সপ্রমাণ কবা আবশ্যক ।

৫০। যদি ভ এই রাশি ক ও খ এই দুইটি রাশির সাধারণ ভাজক হয়, তবে $(পক \pm ফখ)$ এই রাশির একটি ভাজক ভ হইবে ।

এ কথার প্রমাণ অতি সহজ ।

যখন ক ও খ উভয়েই ভাজক ভ,

তখন অবশ্যই $ক = মভ$, $পক = পমভ$,

$খ = বভ$, $ফখ = ফবভ$,

অতএব $পক \pm ফখ = পমভ \pm ফবভ = (পম \pm ফব) ভ$ ।

৫১। দুইটি অনেকপদ রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের নিয়ম ।

বাশিদ্বয়কে তাহাদেব প্রধান অঙ্কবোব শক্তিক্রমে সাজাইয়া অমুচ্চশক্তি-বিশিষ্ট রাশিধাবা অপর বাশিকে ভাগ কব । যদি ভাগশেষ না থাকে তবে সেই ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক ।

যদি ভাগশেষ থাকে তবে তদ্বারা প্রথম ভাজককে ভাগ কব । যদি ভাগশেষ না থাকে তবে এই বাবেব ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক ।

যদি ভাগশেষ থাকে তবে তদ্বারা পূর্ববর্তী ভাজককে ভাগ কর । যদি ভাগশেষ না থাকে তবে এই বাবেব ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক ।

যদি ভাগশেষ থাকে, পূর্ববৎ প্রক্রিয়া চালাইবে, যতক্ষণ না বিনা ভাগশেষে ভাগকার্য সমাধা হয় ।

শেষবারের ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক জানিবে ।

এই নিয়মের হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে ।

মনে কর ক ও খ এব উ, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে । এবং মনে কর উক্ত নিয়মমত প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইল, যথা—

$$\begin{array}{r}
 \text{খ) ক (ম} \\
 \quad \underline{\text{মখ}} \\
 \quad \text{গ) খ (ব} \\
 \quad \quad \underline{\text{বগ}} \\
 \quad \quad \text{ঘ) গ (র} \\
 \quad \quad \quad \underline{\text{বঘ}} \\
 \quad \quad \quad \cdot
 \end{array}$$

তাহা হইলে

ক = মখ + গ, এবং গ = ক - মখ,

খ = বগ + ঘ, এবং ঘ = খ - বগ,

গ = রঘ + ০ ।

অর্থাৎ ঘ এই রাশি গ এব ভাজক এবং ঘ এর ভাজক, সুতরাং ৫০ ধারা অনুসারে

ঘ এই রাশি (বগ + ঘ) এব অর্থাৎ খ এর ভাজক ।

এবং ঘ এই রাশি গ এরও ভাজক ।

সুতরাং ঘ এই রাশি (মখ + গ) এর অর্থাৎ ক এরও ভাজক ।

∴ ঘ এই রাশি ক ও খ এব সাধারণ গুণনীয়ক ।

আবার ক ও খ এর প্রত্যেক সাধারণ ভাজক

(ক - মখ) এব অর্থাৎ গ এর ভাজক,

সুতরাং (খ - বগ) এর অর্থাৎ ঘ এর ভাজক ।

কিন্তু ঘ অপেক্ষা ঘ এর উচ্চতম ভাজক নাই ।

সুতরাং ঘ অপেক্ষা ক ও খ এর উচ্চতম সাধারণ ভাজক নাই ।

এবং দেখা গিয়াছে যে এই রাশি k ও x এর একটি সাধারণ ভাজক ।

অতএব যে এই রাশিট k ও x এর উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়ক ।

(১) উদাহরণ । $s^2 + 9s + 12$ এবং

$$s^3 + 8s^2 + 20s + 16 \text{ ইহাদের}$$

উ, সা, গ, নির্ণয় কর ।

$$s^2 + 9s + 12) s^3 + 8s^2 + 20s + 16 \text{ (স+১)}$$

$$s^3 + 9s^2 + 12s$$

$$s^2 + 8s + 16$$

$$s^2 + 9s + 12$$

$$\text{স+৪) } s^2 + 9s + 12 \text{ (স+৩)}$$

$$s^2 + 8s$$

$$s + 12$$

$$s + 12$$

∴ ইষ্ট উ, সা, গ, = $s + 4$ ।

(২) উদাহরণ । $s^2 + 9s + 12$ এবং

$$3s^3 + 28s^2 + 60s + 80 \text{ ইহাদের}$$

উ, সা, গ, নির্ণয় কর ।

$$s^2 + 9s + 12) 3s^3 + 28s^2 + 60s + 80 \text{ (৩স+৩)}$$

$$3s^3 + 27s^2 + 36s$$

$$s^2 + 2s + 40$$

$$3s^2 + 27s + 36$$

$$\text{৩স+১২) } s^2 + 9s + 12 \text{ (৬স+১)}$$

$$s^2 + 8s$$

$$s + 12$$

$$s + 12$$

অতএব এই প্রক্রিয়ার ফল এই হইতেছে যে $3s + 12$ ইষ্ট উ, সা, গ ।

উদাহরণের প্রথম রাশি $(৩স+১২)$ দ্বিরা ভাগ করিলে দেখা যায় ভাগফল $৩স+১$ হইতেছে ।

অর্থাৎ এই ভাগফলের প্রথম পদের সাংখ্যপ্রকৃতি ভগ্নাংশ হইতেছে । তবে মূল অক্ষর স কোন ভগ্নাংশের হবে নাই ।

এস্থলে দেখা বাইতেছে উদাহরণের দ্বিতীয় রাশির একটি উৎপাদক ৩, কিন্তু উদাহরণের প্রথম রাশি ৩ দ্বিরা ভাজ্য নহে । এক্ষণ স্থলে ভাজক $(৩স+১২)$ ইহার পবিবর্তে $(স+৪)$ এই রাশিকে ভাজক বলিয়া লওয়াই উচিত । মূলরাশিদ্বয়ের মধ্যে যদি কোন একটির একরূপ কোন সংখ্যা ভাজক থাকে তাহা অপবটিব ভাজক নহে, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিটিকে সেই ভাজক দ্বিরা অগ্রে ভাগ করিয়া উক্ত নিয়মের প্রক্রিয়া আরম্ভ করা উচিত । তাহা হইলে প্রক্রিয়া অনেকটা সহজ হইবে ।

এই উদাহরণে দ্বিতীয় রাশিকে ৩ দ্বিরা ভাগ করিয়া পবে প্রক্রিয়া আরম্ভ করিলে সেই প্রক্রিয়া প্রথম উদাহরণের প্রক্রিয়ার ভ্রান্ত হইবে ।

(৩) উদাহরণ । $২স^২+১৪স+২৪$ এবং

$৩স^৩+২৪স^২+৬০স+৪৮$ টিহাদেব উ, সা, গ, নির্ণয় কব ।

$২স^২+১৪স+২৪) ৩স^৩+২৪স^২+৬০স+৪৮ (৩স+১২$

$$\begin{array}{r} ৩স^৩+২১স^২+৩৬স \\ \underline{৩স^৩+২৪স^২+৪৮} \\ ৩স^২+২১স+৩৬ \\ \underline{৩স^২+২১স+৩৬} \\ ৩স+১২ \end{array}$$

কিন্তু বখন দেখা বাইতেছে প্রথম রাশি ২ দ্বিরা

এবং দ্বিতীয় রাশি ৩ দ্বিরা

ভাজ্য এবং ২ ও ৩এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, তখন প্রথম রাশিকে ২ দ্বিরা এবং দ্বিতীয় রাশিকে ৩ দ্বিরা অগ্রে ভাগ করিয়া পরে প্রক্রিয়া আরম্ভ করিলে কার্য্য সহজ হইবে । এবং তাহা হইলে রাশিদ্বয় বিভাগান্তে $স^২+৭স+১২$ এবং $স^৩+৮স^২+২০স+১৬$ হইবে ।

সুতরাং প্রক্রিয়া ঠিক (১) উদাহরণের প্রক্রিয়ার ভ্রান্ত হইবে ।

- ৫২। তিন বা ততোধিক রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের নিয়ম ।

অগ্রে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর। তাহার পর সেই উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়কেব ও তৃতীয় রাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর।
* তদনন্তর এই শেষোক্ত উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়কেব ও চতুর্থ রাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর। এইরূপে শেষ রাশি পর্যন্ত চল। তাহা হইলে সর্বশেষেব নির্ণীত উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়কই ইষ্ট গুণনীয়ক হইবে।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কর ক, খ, গ, ও ঘএব উ, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে, এবং মনে কর

ক ও খএব উ, সা, গ = প,

প ও গএব = ফ,

এবং ফ ও ঘএব = ব।

তাহা হইলে,

ক ও খএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক পএব ভাজক (৫১ ধারা দ্রষ্টব্য)

∴ ক, খ, ও গএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক প ও গএব ভাজক,

এবং ∴ ক, খ, ও গএব উ, সা, গ, প ও গএব সাধারণ ভাজক।

আবার

∴ পএর প্রত্যেক ভাজক ক ও খএব সাধারণ ভাজক।

∴ প ও গএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক ক, খ, ও গএব সাধারণ ভাজক,

এবং ∴ প ও গএর উ, সা, গ, ক, খ, ও গএব সাধারণ ভাজক।

সুতরাং প ও গএব উ, সা, গ, ক, খ, ও গএব উ, সা, গ।

এইরূপে দেখা যাইবে,

ক ও ঘএব উ, সা, গ, ক, খ, গ, ও ঘএব উ, সা, গ,। ইত্যাদি।

৫৩। দুই বা ততোধিক রাশির সাধারণ গুণিতক সম্বন্ধে পাটীগণিতে বাহা বলা হইয়াছে (পাটীগণিতের ৫৪ ও ৬১ ধারা দ্রষ্টব্য) তাহার পুনরুক্তি এখানে নিম্নরোজন।

তদতিরিক্ত বীজগণিতে বলা আবশ্যক এই যে পাটীগণিতে যেখানে ‘সংখ্যা’ শব্দ প্রয়োগ করা হইয়াছে বীজগণিতে সেখানে ‘বাশি’ শব্দ ব্যবহার করিতে হইবে। এবং গুণনীয়ক সম্বন্ধে যেমন পাটীগণিতের ‘গরিষ্ঠ’ শব্দ স্থলে বীজগণিতে ‘উচ্চতম’ শব্দ ব্যবহার করা উচিত, গুণিতক সম্বন্ধে তেমনই পাটীগণিতের ‘লঘিষ্ঠ’ শব্দ স্থলে বীজগণিতে ‘নিম্নতম’ শব্দ ব্যবহার উচিত।

এই কএকটি কথা মনে রাখিলে পাটীগণিতের ৬১, ৬২, ও ৬৩ (১) ধারার বাহা বলা হইয়াছে বীজগণিতের নিম্নতম সাধারণ গুণিতক (নি, সা, গ,) সম্বন্ধে তাহা খাটিবে।

৫৪। দুইটি রাশির নিম্নতম সাধারণ গুণিতক নির্ণয়ের নিয়ম। বাশিঘরের গুণফলকে তাহাদেব উ, সা, গ, দ্বারা ভাগ কর। সেই ভাগফল তাহাদেব নি, সা, গ, হইবে।

কারণ রাশিঘরের নি, সা, গ, তাহাদের প্রত্যেকের দ্বারা ভাজ্য, সূত্রবাং তাহাতে তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত মৌলিক উৎপাদকগুলি একবার এবং কেবল একবারমাত্র থাকি আবশ্যক। কিন্তু রাশিঘরের গুণফলে তাহাদেব সাধারণ উৎপাদকগুলি দুইবার থাকিবে। এবং তাহাদেব উ, সা, গ, এষ্ট সাধারণ উৎপাদকগুলির গুণফল। সূত্রবাং তাহাদের গুণফলকে তাহাদেব উ, সা, গ, দ্বারা ভাগ করিলে সেই ভাগফলে তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত মৌলিক উৎপাদকগুলি একবার এবং কেবল একবারমাত্র থাকিবে।

৫৫। যে যে রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে তাহাদের উৎপাদক বিশ্লেষ যদি সহজে হয়, তাহা হইলে তাহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় অতি সহজেই হইতে পারে। কারণ তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত উৎপাদক একবার এবং কেবল একবারমাত্র লইয়া তাহাদের গুণফল লইলেই ইষ্ট নি, সা, গ, পাওয়া যাইবে।

এই ধারার এবং ইহার পূর্ববর্তী ধারার বাহা বলা হইয়াছে নিম্নেব উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে তাহা স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $m^2 + n^2 - ২$, ও $m^2 + ২m^2 - ৩$,

ইহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
 & \frac{s^0 + s^2 - 2}{s^0 + s^2 - 2} \cdot \frac{s^0 + 2s^2 - 3}{s^2 - 1} \cdot \frac{s^0 + s^2 - 2(s+1)}{s^0 - s} \\
 & \quad \cdot \frac{s^2 + s - 2}{s^2 - 1} \cdot \frac{s - 1}{s^2 - 1} \cdot \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1} \cdot \frac{s - 1}{s - 1} \\
 & \quad \cdot \frac{s - 1}{s - 1}
 \end{aligned}$$

∴ বাশিঘরের উ, সা, গ, -- স-১ ।

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ইষ্ট নি, সা, গ,} &= \frac{(s^0 + s^2 - 2)(s^0 + 2s^2 - 3)}{s - 1} \\
 &= s^0 + s^2 + 6s^0 + s^2 - 6s - 6 ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (২) \text{ উদাহরণ। } & ৩s^2 - ১০কস + ৭ক^2, \\
 & ৩s^0 - ৫কস^2 + ৭ক^2স - ৩ক^2,
 \end{aligned}$$

ইহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় কর ।

$$\text{দেখা যাইতেছে } ৩s^2 - ১০কস + ৭ক^2$$

$$(s - ক)(৩স - ৭ক),$$

$$\text{এবং } s^0 - ৫কস^2 + ৭ক^2স - ৩ক^2$$

$$= s^2(s - ক) - ৪কস(s - ক) + ৩ক^2(s - ক)$$

$$= (s - ক)(s^2 - ৪কস + ৩ক^2)$$

$$= (s - ক)(s - ক)(s - ৩ক) ।$$

$$\therefore \text{ইষ্ট নি, সা, গ,} = (s - ক)(s - ক)(s - ৩ক)(৩স - ৭ক) ।$$

৫৬। দুইটি রাশির নিম্নতম সাধাবণ গুণিতক তাহাদের অপর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেব ভাজক ।

কারণ রাশিঘরের নি, সা, গ, এতে তাহাদের প্রত্যেকেব সমস্ত উৎপাদক একবার ও কেবল একবারমাত্র আছে, এবং তাহাদের অন্য প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকে সেট সমস্ত উৎপাদক আছে আব তদতিরিক্ত অপর উৎপাদকও আছে ।

৭৭। তিন বা ততোধিক রাশির নি, সা, গ, নির্ণয়ের নিয়ম ।

অগ্রে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কর। তাব পব সেই নি, সা, গ, ও তৃতীয় রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কব। তদনন্তব এই নি, সা, গ, ও চতুর্থ রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কব। এইরূপে শেষরাশি পর্য্যন্ত চলা তাহা হইলে সর্বশেষেব নির্ণীত নি, সা, গ, ই ইষ্ট নি, সা, গ, হইবে।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কব, ক, খ, গ, ও ঘ এব নি, সা, গ, নির্ণয় কবিত্তে হইবে, এবং মনে কব,

ক ও খ এব	নি, সা, গ, প,
প ও গ এর	ফ,
এবং ফ ও ঘ এব	ব।

তাহা হইলে

∴ ক ও খ এব প্রত্যেক সাধারণ গুণিতক প'ব গুণিতক
(৫৬ খাৰা জুটবা)

∴ ক, খ, ও গ এব নি, সা, গ, প ও গ এব সাধারণ গুণিতক।
আবাব

∴ প ও গ এব প্রত্যেক সাধারণ গুণিতক ক, খ, ও গ এব সাধারণ গুণিতক।

∴ প ও গ এব নি, সা, গ, ক, খ, ও গ এর সাধারণ গুণিতক।

সুতরাং প ও গ এব নি, সা, গ, ক, খ, ও গ এব নি, সা, গ।

এইরূপে দেখা যাইবে

ক ও ঘ এর নি, সা, গ, ক, খ, গ, ও ঘ এব নি, সা, গ,।

ইত্যাদি।

৩। উদাহরণমালা ।

১। নিম্নলিখিত বাণিগুলিব উ, সা, গ, নির্ণয় কব—

- (১) $স^২ - ব^২$ ও $স^২ - ২সব + ব^২$ ।
- (২) $স^২ + ৫স + ৬$ ও $স^২ + ৭স + ১০$ ।
- (৩) $স^৩ + ৬স^২ + ১১স + ৬$ ও $স^৩ + ৯স^২ + ২৭স + ২৭$ ।
- (৪) $স^৩ + ৪স^২ - ৫$ ও $স^৩ - 'স + ২$ ।
- (৫) $স^৩ - ৯স^২ + ১৬স - ২৪$, $স^৩ - ১০স^২ + ৩১স - ৩০$,
ও $স^৩ - ১১স^২ + ৩৮স - ৪০$ ।

২। নিম্নলিখিত বাণিগুলিব নি, সা, গ, নির্ণয় কব

- (১) $স^৩ + স^৩ + ২স - ৪$ ও $স^৩ + ৩স^২ - ৪$ ।
- (২) $স^৩ - ৫স^৩ + স^২ + ৪স - ৪$ ও $স^৩ + স^৩ - ৬স^২ - ৪স + ৮$ ।
- (৩) $৬স^৩ + ৭স^৩ - ৯স + ২$ ও $৮স^৩ + ৬স^৩ - ১৫স^২ + ৯স - ২$ ।
- (৪) $স^৩ - ৭স^২ - ৮০স + ৫৭৬$, $৩স^২ - ১৪স - ৮০$,
ও $৩স^২ + ১৭স - ৯০$ ।
- (৫) $স^৩ - ২স^২ - ১৯স + ১০$, $স^৩ + ২স^২ - ২৩স - ৬০$,
ও $স^৩ + ৭স^৩ - ৪স^২ - ৫২স + ৪৮$ ।

চতুর্থ অধ্যায় ।

ভগ্নাংশ ।

৫৮। ভগ্নাংশ সম্বন্ধে পাটীগণিতের দ্বিতীয় অধ্যায়ের প্রথম ভাগে 'বাহা' বলা হইয়াছে তাহাব পুনরুক্তি নিম্নরোজন ।

পাটীগণিতের ৬৫ হইতে ৮০ ধারায় বাহা বলা হইয়াছে তৎসমুদয়ই বাজ-পণিতে খাটে। তদ্ব্যতিরিক্ত বাহা বলিবার আছে তাহাই এই স্থলে বলা যাইবে।

৫৯। মূল ১ কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ক ভাগ লইলে যে বাশি হয় তাহাকে ভগ্নাংশ বলে।

কিন্তু ১ কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ক ভাগ
লইলে বাহা হয়,
ক কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ১ ভাগ
লইলে ঠিক তাহাই হইবে।

কারণ ক কে খ ভাগে ভাগ করাব অর্থ এই যে

ক এতে যতগুলি ১ আছে তাহার প্রত্যেককে
খ ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেকের এক এক ভাগ লওয়া।

সুতরাং ১ কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ক ভাগ লইলে যে ভগ্নাংশ হয় তাহার আর একটি অর্থ ক কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ভাগফল।

অতএব সেই ভগ্নাংশ $\frac{ক}{খ}$ এই আকারে লিখিত হইতে পারে, কারণ $\frac{ক}{খ}$ এবং

ক-খ একই অর্থ বোধক সঙ্কেত।

৬০। ভগ্নাংশের অর্থ হইতে দেখা যাইতেছে

$$(১) \quad \frac{ক}{খ} \times গ = \frac{ক \times গ}{খ} = \frac{ক}{খ \div গ} ।$$

কারণ $\frac{ক}{খ}$ ভগ্নাংশকে গ গুণ করাব অর্থ,

একের ক সংখ্যক অংশকে গ গুণ করা,

অথবা সেই ক সংখ্যক প্রত্যেক অংশকে গ গুণ বড় করা,

অর্থাৎ এক কে খ ভাগে ভাগ না করিয়া $ক \div গ$ ভাগে

অর্থাৎ পূর্বাপেক্ষা গ গুণে অল্প সংখ্যক ভাগে

*ভাগ করা ।

$$(১) \frac{ক}{খ} \div গ = \frac{ক-গ}{খ} = \frac{ক}{খ \times গ}$$

কারণ $\frac{ক}{খ}$ ভগ্নাংশকে গ ভাগে ভাগ করাব অর্থ,

একের ক সংখ্যক অংশকে গ ভাগে ভাগ করা,

অথবা সেই ক সংখ্যক প্রত্যেক অংশকে গ গুণ ছোট করা,

অর্থাৎ এক কে খ ভাগে ভাগ না করিয়া $ক \times গ$ ভাগে ভাগ করা ।

$$(২) \frac{ক}{খ} = \frac{ক \times গ}{খ \times গ}$$

কারণ ক কে গ দিয়া গুণ করার গুহীত ভাগেব সংখ্যা যে মাত্রায় বৃদ্ধি পাইল,

খ কে গ দিয়া গুণ করার প্রত্যেক ভাগেব পবিমাণ ঠিক সেই মাত্রায় হ্রাস পাইল ।

৬১। উপরের ধারার (১), (২), (৩) সাম্য স্মরণ রাখিলে ভগ্নাংশের আকার পবিবর্তন ও যোগ বিয়োগ ক্রিয়া সম্পাদন করা যাইতে পারে ।

$$\begin{aligned} \text{যথা, } \frac{ক}{খ} \pm \frac{গ}{ঘ} &= \frac{কঘ}{খঘ} \pm \frac{গখ}{ঘখ} \\ &= \frac{কঘ \pm গখ}{খঘ} \end{aligned}$$

কার্য, $\frac{ক}{খ} = \frac{ক}{খ}$, $\frac{গ}{ঘ} = \frac{গ}{ঘ}$,

এবং ১ কে খ ঘ ভাগে ভাগ কবিয়া তাহারই

ক ঘ ও গ ঘ ভাগের যোগ বা বিরোধের ফল অবশ্যই

সেইরূপ ক ঘ \pm গ ঘ ভাগ হইবে,

অর্থাৎ ১ এর খ ঘ ভাগের ক ঘ \pm গ ঘ ভাগ হইবে।

৬২। ভগ্নাংশের গুণনেব, অর্থাৎ $\frac{ক}{খ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া গুণ কবার, অর্থ নির্দেশ
অগ্রে করিয়া পবে তাহার প্রক্রিয়া নিরূপণ কবিত্তে হইবে। কাৰণ গুণনেব
সহজ অর্থ এ স্থলে খাটে না। $\frac{ক}{খ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া গুণ কবার অর্থ তাহাকে $\frac{গ}{ঘ}$ বাব
লওয়া, কিন্তু তাহাকে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া গুণ কবার অর্থ তাহাকে $\frac{গ}{ঘ}$ বাব লওয়া, একথা
বলা যায় না, কেন না $\frac{গ}{ঘ}$ অখণ্ড সংখ্যা না হইলে $\frac{গ}{ঘ}$ বাব লওয়ার সহজে কোন
অর্থ নাই। তবে “ $\frac{ক}{খ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ ভাগে ভাগ কবিয়া তাহাবট গ সংখ্যক ভাগ
লওয়া যাইবে” $\frac{ক}{খ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ বাব লওয়ার অর্থ $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া গুণ কবিবাব, এই অর্থ
নির্দেশ কবিলে, তাহা গুণনের সহজ অর্থের সহিত অসঙ্গত হয় না এবং
সুসঙ্গতই হয়, এবং ভগ্নাংশের গুণন এই অর্থই লওয়া যাইবে। তাহা হইলে
গুণন ক্রিয়া এইরূপ হইবে, যথা

$$\frac{ক}{খ} \times \frac{গ}{ঘ} = \left(\frac{ক}{খ} - \frac{ক}{ঘ} \right) \times গ = \frac{ক}{খঘ} \times গ$$

$$= \frac{কগ}{খঘ} \quad [৬০ ধারায় (১) ও (২) দ্রষ্টব্য]$$

৬৩। ভাগের সহজ অর্থানুসারে ভাগফলকে ভাজক দিয়া গুণ কবিলে
ভাজকে পাওয়া যাইবে।

অতএব $\frac{ক}{খ} \div \frac{গ}{ঘ}$ এমন একটি ভগ্নাংশ

যাহাকে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া উপবেব ধাবানুসাবে গুণ করিলে গুণফল $\frac{ক}{খ}$ হইবে ।

সহজেই দেখা যাইতেছে $\frac{কঘ}{খগ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া গুণ করিলে

$$\text{গুণফল} = \frac{কঘ}{খগ} \times \frac{গ}{ঘ} = \frac{কঘ-ঘ}{খগ-গ} = \frac{ক}{খ} \quad (৬০ \text{ ধাবা দ্রষ্টব্য})$$

অতএব $\frac{ক}{খ} \div \frac{গ}{ঘ} = \frac{কঘ}{খগ}$ ।

৬৪ । উপবেব ৬০ হটতে ৬৩ ধাবাতে ক, খ, গ, ঘ ইহাবা অথগু বাশি বলিয়া মানিয়া লওয়া গিয়াছে । কিন্তু ক, খ, গ, ঘ খগবাশি অর্থাৎ ভগ্নাংশ হইলেও ঐ ঐ ধাবাব তত্ত্বগুলি সত্য হইবে ।

যথা, মনে কর

$$ক = \frac{প}{ফ}, খ = \frac{ব}{ভ}, গ = \frac{ম}{য} ।$$

তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ} = \frac{প}{ফ} \div \frac{ব}{ভ} = \frac{পভ}{ফব},$$

$$\text{এবং } কগ = \frac{প}{ফ} \times \frac{ম}{য} = \frac{পম}{ফয} ।$$

$$খগ = \frac{ব}{ভ} \times \frac{ম}{য} = \frac{বম}{ভয} ।$$

$$\begin{aligned} \text{অতএব } \frac{কগ}{খগ} &= \frac{পম}{ফয} \div \frac{বম}{ভয} = \frac{পম}{ফয} \times \frac{ভয}{বম} \\ &= \frac{পভ}{ফব} = \frac{ক}{খ} । \end{aligned}$$

৪ উদাহরণমালা ।

নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে সরল কর—

$$(১) \frac{৩স^৩ - ২স^২ - স}{৪স^৩ - ২স^২ - ৩স + ১} ।$$

$$(২) \frac{স^৩ - ৬স^২ - ৩৭স + ২১০}{স^৩ + ৪স^২ - ৪৭স - ২১০} ।$$

$$(৩) \frac{১০স^৩ + ১২স^২ - ৯}{২৫স^৩ - ১২স + ৬} ।$$

$$(৪) \frac{স^৩ - (য-খ)^২}{(খ+স)^২ - য^২} + \frac{য^২ - (খ-স)^২}{(স+য)^২ - খ^২} + \frac{খ^২ - (স-য)^২}{(য+খ)^২ - স^২} ।$$

$$(৫) \frac{ক^২}{(ক-খ)(ক-গ)} + \frac{খ^২}{(খ-গ)(খ-ক)} + \frac{গ^২}{(গ-ক)(গ-খ)} ।$$

$$(৬) \frac{\frac{ক+খ}{ক-খ} + \frac{ক-খ}{ক+খ}}{\frac{ক+খ}{ক-খ} - \frac{ক-খ}{ক+খ}} ।$$

$$(৭) \frac{ক^২ - খ^২}{ক^২ + খ^২} - ২কখ \times \frac{ক-খ}{ক^২ + কগ} ।$$

$$(৮) \left\{ \frac{স}{ক} + \frac{২স^২}{ক(খ-স)} \right\} \left\{ \frac{ক}{স} - \frac{২কস}{স(খ+স)} \right\} ।$$

$$(৯) \left(\frac{ক^৩}{য^৩} + \frac{খ^৩}{ক^৩} \right) \div \left(\frac{ক}{খ} + \frac{খ}{ক} \right) ।$$

$$(১০) \frac{\frac{ক}{খ+গ}}{\frac{খ+গ}{৬}} ।$$

পঞ্চম অধ্যায় ।

শক্তিপ্রসারণ ও মূল্যকর্ষণ ।

৩৫। যে কোন বাশিব শক্তি সেই রাশির উপরে কিঞ্চিৎ দক্ষিণে সেই শক্তিসূচক চিহ্ন লিখিত হইয়া সঙ্ক্ষেপে প্রকাশিত হয়, অথবা সেই বাশির বারংবার গুণন দ্বারা বিস্তৃতরূপে প্রকাশিত হয়। এই বিস্তৃতরূপে বাশিব শক্তিপ্রকাশকে **শক্তিপ্রসারণ** বলা যাইবে। তাহাকে **জ্যোতির্বেশ**ও বলে।

যথা ক এব দ্বিতীয় শক্তি,

ক^২ এবং কক

এই উভয় প্রকারেই প্রকাশিত হইতে পারে।

সেইরূপ (ক+খ) এর তৃতীয় শক্তি,

• (ক+খ)^৩ এবং ক^৩+৩ক^২খ+৩কখ^২+খ^৩

এই উভয় প্রকারেই প্রকাশিত হইতে পারে।

৩৬। একপদ বাশিব শক্তিপ্রসারণ সহজ।

অনেকপদ বাশিব শক্তিপ্রসারণ তত সহজ নহে।

ক্রমান্বয়ে গুণন দ্বারা তাহা সম্পন্ন হইতে পারে, কিন্তু সে প্রণালী প্রমসাদ্য।

বিপদের যে কোন শক্তিপ্রসারণ সম্বন্ধে একটি সাধারণ নিয়ম আছে তাহা একাদশ অধ্যায়ে বিবৃত হইবে। এখানে বিপদ ও বহুপদ রাশির দ্বিতীয় ও তৃতীয় শক্তি প্রসারণ সম্বন্ধে দুই একটি কথা বলা যাইবে।

৩৭। গুণন দ্বারা জানা যায়,

$$(ক+খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২ ।$$

$$(ক+খ)^৩ = ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩ ।$$

$$(ক + খ + গ)^২ = ক^২ + ২ক(খ + গ) + খ^২ + ২খগ + গ^২$$

$$= (ক + খ)^২ + ২গ(ক + খ) + গ^২ ।$$

$$(ক + খ + গ + ঘ)^২ = ক^২ + ২ক(খ + গ + ঘ) + খ^২ + ২খ(গ + ঘ)$$

$$+ গ^২ + ২গঘ + ঘ^২$$

$$= (ক + খ + গ)^২ + ২ঘ(ক + খ + গ) + ঘ^২ ।$$

$$(ক + খ + গ)^৩ = (ক + খ)^৩ + ৩(ক + খ)^২গ + ৩(ক + খ)গ^২ + গ^৩$$

$$= ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩$$

$$+ ৩ক^২গ + ৬কখগ + ৩খ^২গ$$

$$+ ৩কগ^২ + ৩খগ^২ + গ^৩$$

$$= ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩ক^২গ + ৩কখ^২ + ৬কখগ + ৩কগ^২$$

$$+ খ^৩ + ৩খ^২গ + ৩খগ^২ + গ^৩ ।$$

৬৮। যেমন ক^২, কএব দ্বিতীয় শক্তি বা বর্গ,

এবং ক^২ + ২কখ + গ^২, (ক + খ)এব দ্বিতীয় শক্তি বা বর্গ,

তেমনট ক ও (ক + খ), ক^২ ও ক^২ + ২কখ + খ^২, ইহাদেব বর্গমূল ।

কোন বাশির বর্গমূলেব চিহ্ন এই √ ,

যথা, √ক^২ = ক ।

কোন বাশিব ঘনমূলের চিহ্ন এই ∛ ,

যথা, ∛ক^৩ = ক ।

যেমন ক^ন, ক এব ন তম শক্তি,

তেমনই ক, ক^ন এব ন তম মূল,

এবং √ক^ন = ক ।

৬৯। যে কোন বাশিব যে কোন শক্তি, সহজেই হউক বা শ্রমেই হউক, সর্বত্র নির্ণয় করা যাইতে পারে । যদি কোন সহজ নিয়ম অবলম্বনীয় না হয়, অন্ততঃ ক্রমান্বয়ে গুণন দ্বারা কার্য সিদ্ধ হইবে । এবং কোন বাশির বর্গ ও ঘন নির্ণয়ের সহজ নিয়ম পূর্বেই দর্শিত হইয়াছে (৬৭ দ্বারায় দ্রষ্টব্য) ।

কিন্তু যে কোন রাশির বর্গমূল বা ঘনমূল নির্ণয় সহজ নহে। এবং প্রদত্ত রাশি কোন রাশির বর্গ বা ঘন না হইলে তাহার ঠিক বর্গমূল বা ঘনমূল নির্ণয় করা যায় না।

৭০। কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণ কবিতে হইলে দেখা আবশ্যক, মূল হইতে বর্গ কিরূপে উৎপন্ন হয়, অর্থাৎ মূলবাশি ও তাহার বর্গ পদগুলোর আকারের কিরূপ সম্বন্ধ।

আমরা জানি,

$$(ক + খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২ ।$$

ইহাতে দেখা যাইতেছে বর্গবাশি কোন একটি প্রধান অক্ষরের শক্তি-ক্রমে সাজাইলে, তাহার প্রথম পদের বর্গমূলই বর্গমূলের প্রথম পদ, ও বর্গমূলের সেই প্রথম পদের দ্বিগুণ দ্বারা বর্গবাশির দ্বিতীয় পদকে ভাগ করিলে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়। এবং ক্রমান্বয়ে বর্গমূলের প্রথম পদের বর্গ অর্থাৎ ক^২, ও সেই প্রথম পদের দ্বিগুণে দ্বিতীয় পদ যোগ করিয়া দ্বিতীয় পদের সহিত সেই যোগফলের গুণফল, অর্থাৎ (২ক + খ)খ, বর্গ রাশি হইতে বাদ দিলে, আর কিছু বাকি থাকে না।

আবার

$$(ক + খ + গ)^২ = (ক + খ)^২ + ২(ক + খ)গ + গ^২ ।$$

অতএব বর্গমূল যদি ত্রিপদ রাশি হয়, তাহা হইলে তাহার প্রথম দুই পদ ক + খ নিরূপিত হইবার পূর্ব, সেই (ক + খ)কে কএর দ্বারা জ্ঞান করিয়া, তাহার দ্বিগুণ অর্থাৎ ২(ক + খ) দিয়া বর্গ রাশির (ক + খ)^২ বাদ দেওয়া পূর্ব অবশিষ্টাংশের প্রথম পদকে অর্থাৎ ২(ক + খ)গ কে ভাগ কবিলে মূলের তৃতীয় পদ গ পাওয়া যায়। এবং বর্গবাশি হইতে {২(ক + খ) + গ}গ বাদ দিলে আর কিছু বাকি থাকে না।

বর্গমূলে আরও পদ থাকিলে উক্ত প্রণালীতে তাহা নিরূপণ করা যায়।

অতএব বর্গমূল নিরূপণের সাধারণ নিয়ম নিম্নের দ্বারা লিখিত মত হইবে।

৭১৫ বর্গমূল নিরূপণের নিয়ম ।

বর্গরাশি প্রধান অক্ষরের শক্তিক্রমে সাজাও ।

তাহার পর প্রথম পদেব বর্গমূল নির্ণয় করিয়া তাহা বর্গমূলেব প্রথম পদ বলিয়া লিখ, এবং তাহাব বর্গ বর্গবাশি হইতে বাদ দিয়া বিয়োগফল লিখ । তদনন্তর, সেই বর্গমূলেব প্রথম পদের দ্বিগুণ দ্বারা ঐ বিয়োগফলের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাকে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ বলিয়া লিখ, এবং বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ ও দ্বিতীয় পদ একত্র করিয়া সেই যোগফল ঐ দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া সেই গুণফল উক্ত বিয়োগফল হইতে বাদ দেও । যদি কিছু বাকি না থাকে তবে ইষ্ট বর্গমূল ঐ দ্বিপদরাশি । যদি কিছু বাকি থাকে, তবে তাহাব প্রথম দুই পদকে বর্গমূলের লব্ধ দুই পদের দ্বিগুণ দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাকে বর্গমূলের তৃতীয় পদ বলিয়া লিখ, এবং তাহাব পর পূর্বমত প্রক্রিয়া চালাও । এইরূপে যদি আর বাকি কিছু না থাকে তবে ঠিক বর্গমূল পাওয়া যাইবে ।

নিম্নের উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে প্রক্রিয়াব প্রণালী ও তাহাব হেতু স্পষ্ট বুঝা যাইবে ।

(১) উদাহরণ । $8s^2 + 12সব + 2৩^2$ ইহাব বর্গমূল নির্ণয় কব ।

$$\begin{array}{r}
 8s^2 + 12সব + 2৩^2 \\
 \underline{8s^2} \\
 12সব + 2৩^2 \\
 \underline{12সব + 2৩^2} \\
 0
 \end{array}
 \quad \therefore \text{বর্গমূল} = 2স + ৩৩$$

(২) উদাহরণ । $s^3 + ৮স^2 + 2স^3 + 1৬স^2 - ৮স + 1$ ইহার বর্গমূল নির্ণয় কর ।

$$\begin{array}{r}
 s^3 + ৮স^2 - 2স^3 + 1৬স^2 - ৮স + 1 \\
 \underline{s^3} \\
 ২স^3 + ৮স^2 \\
 \underline{২স^3 + ৮স^2} \\
 ৮স^2 - 2স^3 + 1৬স^2 \\
 \underline{৮স^2} \\
 -2স^3 - ৮স + 1 \\
 \underline{-2স^3 - ৮স + 1} \\
 0
 \end{array}
 \quad \therefore \text{বর্গমূল} = s^3 + ৮স - 1$$

৭২। সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় সম্বন্ধে পাটীগণিতের অষ্টম অঙ্কানুসারে বাহা বলা হইয়াছে তদতিরিক্ত আর কিছু এ স্থলে বলিবার প্রয়োজন নাই।

৭৩। বর্গমূলনির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণ যে প্রণালীতে করা গিয়াছে, ঘন-মূলনির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণও সেই প্রণালীতে করা যাইবে।

আমরা জানি

$$(ক + থ)^৩ = ক^৩ + ৩ক^২থ + ৩কথ^২ + থ^৩ ।$$

ইহাতে দেখা যাইতেছে ঘন বাশি কোন একটি প্রধান অঙ্কের শক্তি অনুসারে সাজাইলে, তাহাব প্রথম পদের ঘনমূলই ঘনমূলের প্রথম পদ। আর ঘনমূলের সেই প্রথম পদের বর্গের তিনগুণ দ্বারা ঘনরাশির দ্বিতীয় পদকে ভাগ করিলে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়। এবং ত্রুমাধ্বয়ে ঘনমূলের প্রথম পদের ঘন অর্থাৎ ক^৩, ও সেই প্রথম পদের বর্গের তিনগুণে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের গুণফলের তিনগুণ ও দ্বিতীয় পদের বর্গ বোগ করিয়া সেই বোগফলের সহিত দ্বিতীয় পদের গুণফল অর্থাৎ ৩ক^২থ + ৩কথ^২ + থ^৩, ঘন বাশি হইতে বাদ দিলে আব কিছুই বাকি থাকে না।

আবার

$$(ক + থ + গ)^৩ = (ক + থ)^৩ + ৩(ক + থ)^২গ + ৩(ক + থ)গ^২ + গ^৩ ।$$

অতএব ঘনমূল ত্রিপদ হইলে, তাহাব প্রথম দুইপদ অর্থাৎ (ক + থ) নিরূপিত হইবার পূর্ব, সেই (ক + থ) কে কএর জায় জ্ঞান করিয়া তাহার বর্গের ত্রিগুণ অর্থাৎ ৩(ক + থ)^২ দ্বারা ঘন রাশির (ক + থ)^৩ বাদ দেওয়া পূর্ব অবশিষ্টাংশের প্রথম পদত্রয় অর্থাৎ ৩(ক + থ)^২গ কে ভাগ করিলে ঘনমূলের তৃতীয় পদ গ পাওয়া যায়। এবং ঘনবাশিব বাকি অংশ হইতে ৩(ক + থ)^২গ + ৩(ক + থ)গ^২ + গ^৩ বাদ দিলে আর কিছু বাকি থাকে না।

ঘনমূলের আরও পদ থাকিলে উক্ত প্রণালীতে তাহা নিরূপণ করা যায়।

৭৪। উপরে বাহা বলা হইল তাহা হইতে ঘনমূল নিরূপণের নিয়ম সহজেই দেখা গেল। এবং নিয়ের উদাহরণের দৃষ্টে তদনুসারে প্রক্রিয়ার প্রণালী স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $৮স^০ + ৩৬স^২ঘ + ৫৪সঘ^২ + ২৭ঘ^৩$ ইহার ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l}
 ৮স^০ & ৩৬স^২ঘ + ৫৪সঘ^২ + ২৭ঘ^৩ \\
 \hline
 ১২স^২ & ৩৬স^২ঘ + ৫৪সঘ^২ + ২৭ঘ^৩ \\
 + (৬স + ৩ঘ)৩ঘ & \\
 \hline
 ১২স^২ + ১৮সঘ + ৯ঘ^২ & ৩৬স^২ঘ + ৫৪সঘ^২ + ২৭ঘ^৩ \\
 \hline
 \therefore \text{ঘনমূল} = ২স + ৩ঘ।
 \end{array}$$

(২) উদাহরণ। $স^৩ + ৬স^২ + ২১স + ৪৪স^০ + ৬৩স^২ + ৫৪স + ২৭$ ইহার ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l}
 ৬স^২ + ২১স + ৪৪স^০ & ৬স^২ + ২১স + ৪৪স^০ \\
 \hline
 ৩স^৩ & ৬স^২ + ২১স + ৪৪স^০ \\
 + (৩স^২ + ২স)২স & \\
 \hline
 ৩স^৩ + ৬স^২ + ৪স^২ & ৬স^২ + ১২স + ৮স^০ \\
 ৩(স^৩ + ৪স^০ + ৪স^২) & \\
 + \{৩(স^২ + ২স) + ৩\} \times ৩ & \\
 \hline
 ৩স^৩ + ১২স^০ + ২১স^২ + ১৮স + ৯ & ৯স^৩ + ৩৬স^০ + ৬৩স^২ + ৫৪স + ২৭ \\
 & ৯স^৩ + ৩৬স^০ + ৬৩স^২ + ৫৪স + ২৭ \\
 \hline
 \therefore \text{ঘনমূল} = স^২ + ২স + ৩।
 \end{array}$$

৭৫। কোন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম উপবেব নিয়ম হইতেই নিরূপণ করা যাইতে পারে। তবে বীজগণিতে রাশির যেকোন পদবিচ্ছেদ আছে, পাটীগণিতে সংখ্যাব তাহা নাই, এই জন্য কোন সংখ্যাব ঘনমূলে ক'টি অঙ্ক থাকিবে তাহা আগে স্থির করা আবশ্যক।

আমবা জানি ১ এর ঘনমূল = ১,

১০০০ এর ঘনমূল = ১০,

১০০০০০ এর ঘনমূল = ১০০,

ইত্যাদি।

অতএব, ১ হইতে ২২২ এর ঘনমূলের অখণ্ড ভাগে ১টি অঙ্ক থাকিবে,
 ১০০০ হইতে ২২২২২২ এর ... ২টি ... ,
 ১০০০০০ হইতে ২২২২২২২২ এর .. ৩টি . .. ,
 ইত্যাদি।

•• আমরা ইহাও জানি যে,
 ••••• ০০১ এর ঘনমূল ১,
 ••••• ০১ এর ০১,
 ••••• ০০১ এর ... ০০১,
 ইত্যাদি।

অতএব

ঘন রাশির দশমিক ভাগে ৩ ঘব দশমিক থাকিলে ঘনমূলে ১ ঘব
 ৬ ২ .
 ৯ ৩ . .

দশমিক থাকিবে। ইত্যাদি।

এবং আবশ্যিক মত দক্ষিণে • দিয়া দশমিকের ঘরের সংখ্যা ৩ এর গুণিতক
 করিয়া লওয়া যাইতে পারে, ও তাহাতে দশমিকের মূল্য ঠিক থাকে।
 (পাটীগণিতের ৮৫ ধারা দ্রষ্টব্য)।

সুতরাং যদি কোন সংখ্যার এককের অঙ্কের উপর একটি বিন্দু দিয়া
 তাহাব বামে ও দশমিক বিন্দুর দক্ষিণে প্রত্যেক তৃতীর অঙ্কের উপরে একটি
 করিয়া বিন্দু দেওয়া যায়, তাহা হইলে অখণ্ড ভাগের বিন্দুর সংখ্যা ঘনমূলের
 অখণ্ড ভাগের অঙ্কের সংখ্যাজ্ঞাপক, এবং দশমিক ভাগের বিন্দুর সংখ্যা
 ঘনমূলের দশমিক ভাগের অঙ্কের সংখ্যাজ্ঞাপক হইবে।

৭৬। সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম নির্দ্ভাবনার্থে দেখা যাউক ঘনমূল
 হইতে ঘনসংখ্যা কিরূপে উৎপন্ন হয়।

$$\begin{aligned} ২৫^৩ &= (২০ + ৫)^৩ \\ &= ২০^৩ + ৩ \times ২০^২ \times ৫ + ৩ \times ২০ \times ৫^২ + ৫^৩ \\ &= ৮০০০ + ৬০০০ + ১৫০০ + ১২৫ \\ &= ১৫৬২৫। \end{aligned}$$

এবং ১৫৬২৫ কে ৭৫ ধারায়তে বিন্দুদ্বারা চিহ্নিত করিলে তাহা ১৫৬২৫ ,
এই আকার ধারণ করে, ও দেখা যায় তাহার ঘনমূলে দুইটি অঙ্ক আছে ।

এখন ১৫৬২৫ হইতে তাহার ঘনমূল ২৫ পাইতে হইলে ৭৩ ও ৭৪ ধারায়
হাতা দর্শিত হইয়াছে তৎপ্রতি দৃষ্টি বাধিয়া পশ্চাৎ লিখিত প্রক্রিয়া অবলম্বন
করা যাইতে পারে—

$$\begin{array}{r}
 ১৫৬২৫ (১০ + ৫ \\
 \overline{৮} \\
 ৩ \times ২০^২ = ১২০০ \quad \left| \begin{array}{l} ৭৬২৫ \\ ৭৬২৫ \end{array} \right. \\
 ৩ \times ২০ \times ৫ = ৩০০ \\
 ৫^২ = ২৫ \\
 \hline
 ১৫২৫
 \end{array}$$

উপরেব ৭৩ ও ৭৪ ধারায় প্রতি লক্ষ্য বাধিয়া এই প্রক্রিয়াব প্রতি দৃষ্টি
করিলেই সংখ্যাব ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম জানা যাইবে । নিম্নেব উদাহরণ দ্বারা
এই কথা আবণ্ড স্পষ্ট বুঝা যাইবে ।

উদাহরণ । ৩২৭৬৪ এর ঘনমূল নির্ণয় কর ।

$$\begin{array}{r}
 ৩২৭৬৪ (৩০ + ২ \\
 \overline{২৭} \\
 ৩ \times ৩০^২ = ২৭০০ \quad \left| \begin{array}{l} ৫৭৬৪ \\ ৫৭৬৪ \end{array} \right. \\
 ৩ \times ৩০ \times ২ = ১৮০ \\
 ২^২ = ৪ \\
 \hline
 ৩৮৪
 \end{array}$$

∴ ঘনমূল = ৩২

৭৭। যে হেতুক

$$\begin{aligned}
 \sqrt[৩]{৫} &= \sqrt[৩]{\overline{৫০০০}} = \sqrt[৩]{৫০০০}, \\
 &= \sqrt[৩]{\overline{৫০০০০০০}} = \sqrt[৩]{৫০০০০০০}, \\
 &= \text{ইত্যাদি,}
 \end{aligned}$$

অন্তএব যদি কোন সংখ্যার ঠিক ঘনমূল না পাওয়া যায়, তব্লে তাহাব দক্ষিণে ক্রমশঃ তিন তিনটি করিয়া • শূন্য দিয়া ঘনমূল আকর্ষণ ক্রিয়া যতদূর ইচ্ছা চালান বাইতে পারে । এবং প্রাপ্ত সংখ্যাতে সংযুক্ত প্রত্যেক শূন্যত্রয়েব স্তলে ঘনমূলেব দশমিক ভাগে এক একটি করিয়া ঘর বাড়িতে থাকিবে, ও মূলক ঘনমূল ক্রমশঃ প্রাপ্ত ঘনমূলেব সন্নিহিত হইতে থাকিবে ।

•উদাহরণ । ১৫ এর ঘনমূল নির্ণয় কৰ ।

$$\begin{array}{r}
 ১৫০০০০০০০ (১৭০২ \\
 ১ \\
 \hline
 ৩ \times ১০^৩ = ৩০০ \quad | \quad ৪০০০ \\
 ৩ \times ১০ \times ৭ = ২১০ \quad | \\
 ৭^২ = ৪৯ \quad | \quad ৩২১৩ \\
 \hline
 ৪৫৯ \quad | \\
 ৩ \times ১৭০২ = ৮৬৭০০ \quad | \quad ৮৭০০০ \\
 ৩ \times ১৭০ \times ০ = \quad | \quad ০ \\
 ০^২ = \quad | \quad ০ \\
 \hline
 ৮৬৭০০ \quad | \\
 ৩ \times ১৭০০২ = ৮৬৭০০০ \quad | \quad ৮৭০০০০০ \\
 ৩ \times ১৭০০ \times ০ = ৪৫২০০ \quad | \quad ৭৮৪৪০৮২২ \\
 ০^২ = \quad | \quad ৮১ \\
 \hline
 ৮৭১৫২০৮১ \quad | \quad ৮৫৫৬১৭১
 \end{array}$$

∴ ঘনমূল = ১৫.৭০২

৫। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত রাশিগুলির শক্তি প্রসারণ কব—

(১) $(ক + ২খ + ৩গ)^২$ । (২) $(ক + ২খ^৩ + ৩গ^৩)^২$ ।

(৩) $(ক + ২খ)^৩$ । (৪) $(ক + ২খ^২)^৩$ ।

(৫) $(খ^২ + খ + ১)^৩$ ।

২। নিম্নলিখিত রাশি ও সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর:

(১) $ক^২ + ৪খ^২ + ৯গ^২ + ৪কখ - ৬কগ - ১২খগ$ ।

(২) $৪খ^৩ + ১২খ^৩ + ৫খ^২ - ৬খ + ১$ ।

(৩) $ক^২ + খ^২ + ২কখ + ২ক + ২খ + ১$ ।

(৪) ১২৩২১। (৫) ২।

৩। নিম্নলিখিত রাশি ও সংখ্যাগুলির ঘনমূল নির্ণয় কব।

(১) $ক^৩ + ৬ক^২খ + ৯ক^২গ + ৩৬কখগ + ১২কখ^২ + ২৭কগ^২$
 $+ ৮খ^৩ + ৩৬খ^২গ + ৫৪খগ^২ + ২৭গ^৩$ ।

(২) $খ^৩ + ৩খ^২ + ৬খ + ৭খ^৩ + ৬খ^২ + ৩খ + ১$ ।

(৩) $ক^৩ + ৬ক^২খ^২ + ১২কখ^২ + ৮খ^৩$ ।

(৪) ৬৮৫৯।

(৫) ১৪৪১'৫৪৪।

ষষ্ঠ অধ্যায় ।

“ শক্তিচিহ্ন, করণী, ও ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশি ।

৭৮। পূর্বের ২০ ধারায় বলা হইয়াছে,

$$ক^n = ক \times ক \times ক \times \dots \quad n \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}$$

$$ক^m = ক \times ক \times ক \times \dots \quad m \dots$$

$$\begin{aligned} \text{অতঃপর } ক^n \times ক^m &= ক \times ক \times \dots \quad n \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত} \\ &\quad \times ক \times ক \times \dots \quad m \dots \\ &= ক \times ক \times ক \times ক \times \dots \quad (n+m) \dots \\ &= ক^{n+m} \end{aligned}$$

কিন্তু এস্থলে n ও m উভয়েই অশূন্য ধনসংখ্যার রাশি ।

তাহাব পবে ২৬ ধারায় দর্শিত হইয়াছে

$$ক^{-n} = \frac{1}{ক^n} \quad ।$$

কিন্তু এস্থলেও n অশূন্য ধনসংখ্যার রাশি ।

এই দুইটি কথা একত্র কবিলে দেখা যায়,

কোন রাশির শক্তিচিহ্ন

অশূন্য ধনসংখ্যা হইলে তাহাব অর্থ এই যে,

সেই রাশি সেই সংখ্যক বাব উৎপাদকরূপে গৃহীত,

এবং শক্তিচিহ্ন

অশূন্য ঋণসংখ্যা হইলে তাহাব অর্থ এই যে,

তাহা সেই রাশির সেই পরিমাণ ধনচিহ্নিত শক্তির অন্তোত্তক ।

এখন প্রশ্ন উঠিতে পারে,

ক^ন এই বাণিব শক্তিচিহ্ন ন

যদি অখণ্ড সংখ্যা না হইয়া কোন ভগ্নাংশ হয়,

যথা $n = \frac{p}{q}$, (এ স্থলে প ও ক উভয়েই অখণ্ড ধনসংখ্যা,)

তাহা হইলে ক^ন এর অর্থ কি হইবে।

এরূপ স্থলে শক্তিচিহ্নের সহজ অর্থ খাটে না, কারণ, ক কে ন অর্থাৎ $\frac{p}{q}$ বাব উৎপাদক রূপে গ্রহণ করার কোন অর্থ নাই।

দেখা যাউক শক্তিচিহ্ন সম্বন্ধীয় মূল নিয়ম, অর্থাৎ $k^n \times k^m = k^{n+m}$,

শক্তিচিহ্ন ভগ্নাংশ হইলেও খাটিবে এইকথা মানিয়া লইলে, $k^{\frac{p}{q}}$ এর কোন অর্থ হয় কি না।

তাহা হইলে,

$$\left(k^{\frac{p}{q}}\right)^q = k^{\frac{p}{q} \times q} = k^p$$

(য সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$$= k^{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q}} \quad (\text{ক সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত})$$

$$= k^{\frac{p}{q} \times q}$$

$$= k^p$$

অতএব উভয় দিকের ক তম মূল হইলে,

$$\sqrt[k]{\left(\frac{p}{k}\right)^k} = \sqrt[k]{k^p}।$$

∴ অর্থাৎ $\frac{p}{k} = \sqrt[k]{k^p}।$

সুতরাং $\frac{p}{k}$ এমন একটি বাহ্যি বাহার

ক শক্তি = k^p , অর্থাৎ $\frac{p}{k}$ এর অর্থ এই যে

তাহা k^p এর ক তম মূল।

৭৯। এখন দেখা যাউক $k^{-\frac{p}{k}}$ এর অর্থ কি।

শক্তিচিহ্নের মূল নিয়ম অর্থাৎ $k^n \times k^m = k^{n+m}$

যদি খাটে, তবে,

$$\begin{aligned} k^{-\frac{p}{k}} \times k^{\frac{p}{k}} &= k^{-\frac{p}{k} + \frac{p}{k}} \\ &= k \\ &= 1 \text{ (২৭ ধারা দ্রষ্টব্য)} \end{aligned}$$

সুতরাং $k^{-\frac{p}{k}} = \frac{1}{k^{\frac{p}{k}}}।$

৮০। অতএব শক্তিচিহ্ন অথবা বা খণ্ড ধনরাশি বা ঋণরাশি হইলে তাহার কি অর্থ হইবে তাহা দেখা গেল, এবং আবণ্ড দেখা গেল, সেই অর্থ শক্তিচিহ্নের মূল নিয়মের সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গতি রাখিয়া নিরূপিত হইল।

$$^{\text{প}}\frac{\text{প}}{\text{ক}} \times \text{ক}^{\text{ব}}\frac{\text{ব}}{\text{ভ}} = \text{ক}^{\text{প}}\frac{\text{প}}{\text{খ}} + \frac{\text{ব}}{\text{ভ}},$$

$$\text{ক}^{\frac{৩}{৪}} \times \text{ক}^{\frac{৩}{৪}} = \text{ক}^{\frac{৩}{৪} + \frac{৩}{৪}} = \text{ক}^{\frac{৩}{২}}।$$

$$\text{স}^{\frac{৩}{৪}} - \text{স}^{\frac{৩}{৪}} = \text{স}^{\frac{৩}{৪} - \frac{৩}{৪}} = \text{স}^{\frac{০}{৪}},$$

$$\text{স}^{\frac{১}{৫}} \div \text{স}^{\frac{১}{৫}} = \text{স}^{\frac{১}{৫} - \frac{১}{৫}} = \text{স}^{\frac{০}{৫}}।$$

৮১। পূর্বেই বলা হইয়াছে (৬৯ ধাৰা দ্রষ্টব্য) সকল সংখ্যা বাঁ বাশির সকল মূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না।

যথা ৪এব বর্গমূল ঠিক নির্ণয় করা যায়,

$$\text{এবং } \sqrt{৪} = ২।$$

কিন্তু ৮এব বর্গমূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না।

তাহা ২ অপেক্ষা বড় ও ৩ অপেক্ষা ছোট। এবং এমন কোন সংখ্যা নাই যাহার বর্গ ঠিক ৮। তবে বর্গমূল আকর্ষণের প্রক্রিয়া চালাইলে ক্রমশঃ লব্ধ বর্গমূল যতদূর ইচ্ছা ৮এব প্রকৃত বর্গমূলের সম্মিলিত হইতে পারে। (পাটীগণিত ১৭৫ ধাৰা দ্রষ্টব্য)।

আবার ৮এর ঠিক ঘনমূল নির্ণয় করা যায়,

$$\text{এবং } \sqrt[৩]{৮} = ২,$$

কিন্তু ৪এব ঠিক ঘনমূল নির্ণয় করা যায় না।

ক এবং খ এব মূল্য যতই হউক,

$$\text{ক}^২ + ২\text{কখ} + \text{খ}^২ \text{ এই রাশির}$$

$$\text{বর্গমূল } \text{ক} + \text{খ},$$

কিন্তু $\text{ক}^২ + \text{কখ}$ এই রাশির

$$\text{ঠিক বর্গমূল } \text{ক} = ৩, \text{ খ} = ২ \text{ হইলে পাওয়া যায়,}$$

$$\text{অর্থাৎ } \sqrt{৩^২ + ৩ \times ২} = \sqrt{৩৬} = ৬,$$

এবং $\text{ক} = ৩, \text{ খ} = ৪, \text{ বা } \text{ক} = ৩, \text{ খ} = ৫$ হইলে পাওয়া যায় না।

৮২। যে রাশি অপব কোন রাশির অনির্ণের মূল, তাহাকে **করুণী** বা **অরুপ রাশি** বলে।

যথা, $\sqrt{৩}$, $\sqrt[৩]{৪}$, $\sqrt{ক^২+ক^৩}$, $\sqrt[৩]{স+৩স}$, ইত্যাদি।

যে রাশি অপব কোন রাশির নির্ণের মূল তাহাকে **রুপরাশি** বা **রুপ** বলে।

যথা, $\sqrt{৪}$, $\sqrt[৩]{৮}$, $\sqrt{ক^২+২ক^৩+ক^৪}$, $\sqrt[৩]{স^৩}$, ইত্যাদি।

৮৩। (১) কোন করণী যে মূলআয়ক তাহাবই প্রতিরুপ শক্তিতে উখিতকবিয়া যে কোন রুপরাশিকে করণীর আকাবে আনা যাইতে পারে।

যথা, $৩=\sqrt{৩^২}=\sqrt{৯}=\sqrt[৩]{৩^৩}=\sqrt[৩]{২৭}$,

$ক=\sqrt[৩]{ক^৩}=\sqrt[৩]{ক^২}$ ।

(২) আবাব কোন করণীর কোন উৎপাদক যদি প্রকৃত রুপরাশি হয় তবে করণী যে মূলআয়ক, সেই উৎপাদকের সেই মূল আকর্ষণ কবিয়া তাহাকে রুপরাশির আকাবে আনা যাইতে পারে।

যথা, $\sqrt{৮}=\sqrt{৪ \times ২}=\sqrt{৪} \times \sqrt{২}=২ \times \sqrt{২}$,

$\sqrt[৩]{৮}=\sqrt[৩]{৮} \times \sqrt[৩]{২}=২ \sqrt[৩]{২}$,

$\sqrt{ক^৩স^৩}=\sqrt{ক^৩} \times \sqrt{স^৩}=ক \times \sqrt{স^৩}$ ।

এই প্রকাবে করণীচিহ্নের বাহিবে আনীত রুপরাশি ভাগকে করণীর প্রকৃতি বলা যায়।

৮৪। যদি দুই করণীর প্রকৃত করণীভাগ একই হয়, তবে তাহাদের যোগফল বা বিয়োগফল তাহাদের প্রকৃতির যোগফলের বা বিয়োগফলের সহিত সেই প্রকৃত করণীর গুণফল।

যথা, $\sqrt{১৮} \pm \sqrt{৮} = \sqrt{৯ \times ২} \pm \sqrt{৪ \times ২}$

$= ৩ \times \sqrt{২} \pm ২ \times \sqrt{২} = (৩ \pm ২) \times \sqrt{২}$,

$\sqrt{ক^২স^২} \pm \sqrt{ক^২স^২} = ক \times \sqrt{স^২} \pm ক \times \sqrt{স^২}$

$= (ক \pm ক) \times \sqrt{স}$ ।

৮৫। যদি কোন দুইটি করণীর শক্তিচিহ্ন সমান হয়, তবে তাহাদের গুণফল বা ভাগফল করণীর অন্তর্গত রাশির গুণফল বা ভাগফলের সেই শক্তি।

$$\text{যথা, } \sqrt{৮} \times \sqrt{৫} = \sqrt{৮ \times ৫} = \sqrt{৪০} \\ = ২\sqrt{১০},$$

$$\sqrt[৩]{ক^২} \times \sqrt[৩]{স^২} = ক^{\frac{২}{৩}} \times স^{\frac{২}{৩}} \\ = (ক \times স)^{\frac{২}{৩}} \\ = \sqrt[৩]{ক^২স^২}।$$

$$\sqrt{১০} \div \sqrt{৬} = \sqrt{\frac{১০}{৬}} = \sqrt{\frac{৫}{৩}}, \\ \sqrt{ক^৩} \div \sqrt{স^৩} = \sqrt{\frac{ক^৩}{স^৩}} \\ = \left(\frac{ক}{স}\right)^{\frac{৩}{২}}$$

৮৬। উপরে যে সকল উদাহরণ দেওয়া গিয়াছে তাহা একপদী করণীর উদাহরণ। কিন্তু কবণী দ্বিপদ বা বহুপদ হইতে পারে। বর্গমূলাত্মক দ্বিপদ কবণী প্রয়োগ অনেক স্থলে ঘটে, এবং তাহাদের সম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াও অপেক্ষাকৃত সহজ। সেই প্রয়োগ ও প্রক্রিয়া কএকটি নিয়ম নিম্নে নিরূপিত হইবে।

৮৭। বর্গমূলাত্মক দ্বিপদ করণী কোন ভগ্নাংশের হর চইলে, সেই ভগ্নাংশকে রূপরাশি হব বিশিষ্ট আকারে পরিবর্তিত কবিবাব নিয়ম।

মনে কব ভগ্নাংশের আকার এই—

$$\frac{ক + \sqrt{খ}}{ন + \sqrt{স}}। \text{ তাহা হইলে}$$

$$\frac{ক + \sqrt{খ}}{ন + \sqrt{স}} = \frac{(ক + \sqrt{খ})(ন - \sqrt{স})}{(ন + \sqrt{স})(ন - \sqrt{স})}$$

$$= \frac{(k + \sqrt{n})m - \sqrt{m}}{m^2 - n}$$

৮৮। কোন রূপরাশির বর্গমূলের একাংশ রূপরাশি ও একাংশ করণী হইতে পারে না।

যদি তাহা সম্ভবপর হয়, মনে কর

$$\sqrt{n} = k + \sqrt{m}$$

উভয় দিকের দ্বিতীয় শক্তি লইলে,

$$n = k^2 + 2k\sqrt{m} + m,$$

$$\therefore 2k\sqrt{m} = n - k^2 - m,$$

$$\therefore \sqrt{m} = \frac{n - k^2 - m}{2k}$$

= একটি রূপরাশি ।

ইহা অনুমানের বিপরীত, অর্থাৎ \sqrt{m} করণী নহে ।

৮৯। যদি $k + \sqrt{n} = m + \sqrt{s}$ হয়

তবে $k = m$, ও $\sqrt{n} = \sqrt{s}$ ।

যদি $k = m$ না হয়, মনে কর $k = m + a$,

তাহা হইলে

$$m + a + \sqrt{n} = m + \sqrt{s},$$

$$\therefore a + \sqrt{n} = \sqrt{s}.$$

কিন্তু ৮৮ ধারার দ্বারা হইয়াছে তাহা হইতে পারে না।

৯০। যদি $\sqrt{(k + \sqrt{n})} = m + \sqrt{s}$ হয়,

তাহা হইলে $\sqrt{(k - \sqrt{n})} = m - \sqrt{s}$ হইবে।

কারণ, যখন $\sqrt{(k + \sqrt{n})} = m + \sqrt{s}$,

তখন উভয় দিকের দ্বিতীয় শক্তি লইলে,

$$k + \sqrt{n} = m^2 + s + 2m\sqrt{s}.$$

$$\therefore k = m^2 + n,$$

$$\sqrt{n} = 2m\sqrt{m} \quad (৮৯ \text{ ধারা দ্রষ্টব্য})$$

$$\therefore k - \sqrt{n} = m^2 + n - 2m\sqrt{m} \\ = (m - \sqrt{m})^2,$$

$$\therefore \sqrt{k - \sqrt{n}} = m - \sqrt{m}।$$

উক্তপ্রকারে ইহাও সপ্রমাণ হইবে যে,

যদি $\sqrt{k + \sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{m}$ হয়,

তবে $\sqrt{k - \sqrt{n}} = \sqrt{m} - \sqrt{m}$ হইবে।

৯১। $k + \sqrt{n}$ এই করণীর বর্গমূল
নিরূপণের নিয়ম।

$$\text{মনে কব } \sqrt{k + \sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{s},$$

$$\text{তাহা হইলে } \sqrt{k - \sqrt{n}} = \sqrt{m} - \sqrt{s}।$$

(৯০ ধারা দ্রষ্টব্য)।

$$\therefore \text{গুণন দ্বারা } \sqrt{k^2 - n} = m - s।$$

আবার উপরের প্রথম সমীকরণের উভয় দিবেক দ্বিতীয় ংক্লি পাইলে

$$k + \sqrt{n} = m + s + 2\sqrt{ms}।$$

$$\therefore k = m + s \quad (৯২ \text{ ধারা দ্রষ্টব্য})।$$

$$\therefore m + s = k$$

$$m - s = \sqrt{k^2 - n}।$$

\therefore এই দুইটি সমীকরণের বোগ বিয়োগ দ্বারা

$$m = \frac{1}{2}\{k + \sqrt{k^2 - n}\},$$

$$s = \frac{1}{2}\{k - \sqrt{k^2 - n}\}।$$

এইরূপে m ও s জানা গেল,

অতরাং $\sqrt{m} + \sqrt{s}$ অর্থাৎ $\sqrt{k + \sqrt{n}}$ ও জানা গেল।

৯২। পূর্বে বলা হইয়াছে, (৮১খারা দ্রষ্টব্য) সকল রাশির সকল মূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না। তবে যতদূর ইচ্ছা মূলেব সমিহিত সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। যে রাশি এইরূপ অন্তরাশিব অনির্ণেয় মূল তাহাকে অরূপ বা কবলী বলা গিয়াছে।

এতদ্ভিন্ন আর একপ্রকার অনির্ণেয় মূল আছে যাহা কেবল অনির্ণেয় নহে, কিন্তু একেবারে অননুমের। যথা $\sqrt{-২}$ । কাবণ এমন কোন রাশিই নাই ও থাকিতেও পারে না, যাহাব বর্গ বা দ্বিতীয় শক্তি ধনরাশি, কেন না যে কোন রাশিই লওয়া নাউক এবং তাহা ধনরাশিই হউক বা ধনরাশিই হউক, তাহাব বর্গ বা দ্বিতীয় শক্তি অবশ্যই ধনরাশি হইবে। অতএব $\sqrt{-২}$ এই আকাষেব রাশিকে ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশি বলা যায়।

$$\sqrt{-২} = \sqrt{(-১) \times ২} = \sqrt{-১} \times \sqrt{২},$$

এবং $\sqrt{২}$ রূপরাশি অথবা অরূপরাশি হইতে পারে, কিন্তু তাহা প্রকৃত রাশি বটে। অতএব যে কোন ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশিকে

$$\sqrt{-১} \times \text{কোন প্রকৃত রূপ বা অরূপ রাশি}$$

এই আকাষে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

এবং $\sqrt{-১}$ এই একমাত্র ভাবনিক রাশি লইয়া ভাবনিক রাশি সম্বন্ধীয় প্রক্রিয়া চালান যাইতে পারে। আর $\sqrt{-১}$ এর পবিত্বর্থে ‘ভ’ এই অক্ষর ব্যবহার করা যাইতে পারে।

৯৩। এই স্থানে প্রশ্ন উঠিতে পারে, যখন দেখা যাইতেছে $\sqrt{-২}$ বা $\sqrt{-১} \times \sqrt{২}$ কোন অননুমের রাশি নহে, একেবারে ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশি, তখন এ প্রকার রাশিব উৎপত্তি কোথা হইতে, এবং ইহাব অর্থ ও প্রয়োজনই বা কি?

এই প্রশ্নের উত্তর সবল বীজগণিতে দেওয়া তত সহজ নহে। শিক্ষার্থী উচ্চগণিত অধ্যয়নে ইহাব উত্তর ক্রমশঃ পাইবে। এখানে ইহাব উত্তবে সংক্ষেপে যাহা বলা যাইতে পারে তাহা নিয়ে লিখিত হইল।

$$\text{যদি } s^2 + 1 = 0,$$

এইরূপ একটি সমীকরণ থাকে, তবে তাহাতে অব্যক্ত রাশি s এর মান কত জানিতে হইলে, দেখা যাইতেছে

$$s^2 = -1,$$

$$\text{সুতরাং } s = \sqrt{-1}।$$

এই প্রকারে $\sqrt{-1}$ বা i ইহার উৎপত্তি।

পূর্বেই বলা গিয়াছে, ইহা কোন প্রকৃত রাশি হইতে পারে না। এক্ষণে দেখা যাউক ইহার অর্থ কি।

$$\text{গুণনেব নিয়মামুসারে } \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1,$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 1।$$

$$\text{সুতরাং } a \times (\sqrt{-1})^2 = -a,$$

$$a \times (\sqrt{-1})^3 = -a \times \sqrt{-1},$$

$$a \times (\sqrt{-1})^4 = a।$$

অতএব কোন রাশি a কে $\sqrt{-1}$ দিয়া ক্রমশঃ

দুই বাব গুণ করিলে তাহার ফল = $-a$,

তিন বার গুণ করিলে তাহার ফল = $-a \times \sqrt{-1}$,

চারি বার গুণ করিলে তাহার ফল = a ।

পূর্বে বলা হইয়াছে (১৪ ধাৰা দ্রষ্টব্য)—

একদিকে অর্থাৎ দক্ষিণ দিকে কোন বিন্দুর দূরত্বের পরিমাণ যদি a হয়, তাহা হইলে তাহার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বাম দিকে ঠিক ততদূরস্থিত বিন্দুর দূরত্ব— a দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। এখন দেখা যাইতেছে, $\sqrt{-1}$ দ্বারা গুণন এমন একটি প্রক্রিয়া যে, তাহাব ক্রমশঃ দুইবাব প্রয়োগ দ্বারা কোন একটি রাশির ধনচিহ্ন ঋণচিহ্ন হয়, অর্থাৎ চিহ্ন বিপরীত হয়, তিনবার প্রয়োগ দ্বারা একবার প্রয়োগের বিপরীত ফল হয়, এবং চারিবার প্রয়োগ দ্বারা পুনরায় সেই রাশিই পাওয়া যায়।

- এবং সেই রাশি যদি একটি সরল রেখার দৈর্ঘ্যের পরিমাণ হয়, তবে এ প্রক্রিয়ায় দুইবার প্রয়োগে সেই রেখা বা দৈর্ঘ্য এক দিক হইতে ঠিক তাহার বিপরীত দিকে গিয়া পড়ে, অর্থাৎ দুই সমকোণ ঘুরিয়া যায়। আর $\sqrt{-1}$ দ্বারা ক্রমশঃ দুইবার গুণনেব ফল যদি এই হইল, তাহা হইলে একবার গুণনেব ফল সেই বেথাকে এক সমকোণ ঘুরাইয়া লওয়া, ইহা বলা যাইতে পারে।

যথা, মনে কব পার্শ্বের চিত্রে

$$ওক = অ,$$

$$ওক_২ = -অ।$$

তাহা হইলে

$$ওক_৩ = \sqrt{-1} \times অ।$$



$$\text{কাবণ } ওক \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -ওক - ওক_২,$$

$$\text{অতএব } ওক \times \sqrt{-1} = ওক, \text{ একথা বলা যাইতে পারে।}$$

সুতরাং $\sqrt{-1}$ দ্বারা গুণন এমন একটি প্রক্রিয়া যদ্বারা ওক স্থান হইতে ওক, এই স্থানে আইসে। এবং $অ \times (\sqrt{-1})^৩ = অ \times -\sqrt{-1} = -ওক \sqrt{-1} = ওক_৩।$

অতএব, যেমন—চিহ্ন কোন রেখার বিপরীত দিকে পরিবর্তনের, অর্থাৎ দুই সমকোণ ঘূর্ণনেব, প্রক্রিয়ার চিহ্ন, সেইরূপ $\sqrt{-1}$ দ্বারা গুণন তাহাব এক সমকোণ ঘূর্ণনেব প্রক্রিয়াব চিহ্ন বলা সম্ভব বটে।

ভাবনিক রাশি $\sqrt{-1}$ বা ভ সম্বন্ধে সমীকরণেব অধ্যায়ে আরও কিছু বলা যাইবে।

৬। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত রাশিগুলির মূল্য নিরূপণ কর অথবা তাহাদিগকে সরল আকারে আন।—

$$(১) \sqrt[3]{৮} \sqrt[3]{৮} \quad (২) \sqrt[3]{১৬} \sqrt[3]{১৬} \quad (৩) (\sqrt[3]{২})^{\sqrt[3]{৮}}$$

$$(৪) \frac{৩৯}{২} \sqrt{\frac{৪০০৮৪}{৮১৯২}} \quad (৫) (k^{24} - \frac{1}{k})^{-\frac{1}{2}}$$

২। নিম্নের গুণফল ও ভাগফল নির্ণয় কর।

$$(১) (m^3 - m^2 + ১) \times (m^2 - ১)$$

$$(২) (m^2 + ১ + m^{-2}) \times (m^2 - ১ + m^{-2})$$

$$(৩) (m^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}})(m^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}) \div (m^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}})$$

$$(৪) (k^{\frac{1}{2}} + ২ + k^{-\frac{1}{2}}) \div (k^{\frac{1}{2}} + k^{-\frac{1}{2}})$$

৩। নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে সরল আকারে আন।—

$$(১) \sqrt{১৮} + \sqrt{\frac{৮}{৩}} + \frac{\sqrt{২৪}}{৩\sqrt{৩}}$$

$$(২) \frac{১}{\sqrt{৫-১}} - \sqrt{\frac{১}{৫+১}}$$

$$(৩) \frac{k\sqrt{৫g} - k^2}{k^2 - k\sqrt{৫g}}$$

$$(৪) \frac{\sqrt{১+m} - \sqrt{১-m}}{\sqrt{১+m} + \sqrt{১-m}}$$

৪। নিম্নলিখিত করণীগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$(১) ৩ + ২\sqrt{২} \quad (২) ২ - \sqrt{৩}$$

$$(৩) ৩ - \sqrt{৫} \quad (৪) ৬ - ২\sqrt{৫}$$

৫। নিম্নলিখিত ভাবনিক রাশির মূল্য নির্ণয় কর।

$$(১) \left(\frac{-১ + \sqrt{-৩}}{২} \right)^২ \quad (২) \left(\frac{-১ + \sqrt{-৩}}{২} \right)^৩$$

সপ্তম অধ্যায় ।

সমীকরণ ।

উপক্রমণিকা ।

৯৪৭। সমীকরণ বীজগণিতের একটি প্রধান বিষয়। এবং সমীকরণ ক্রিয়া প্রয়োগ দ্বারা অনেক জটিল প্রশ্নের সমাধান হইয়া থাকে।

সমীকরণে অব্যক্ত অর্থাৎ নির্ণেয় বাশি সাধাবণতঃ বর্ণমালায় শেষভাগের অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা গিয়া থাকে। এই পুস্তকে তাহা স, শ, ব ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

৯৫। সমীকরণ নানাবিধ।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অব্যক্ত বাশির প্রথম শক্তি মাত্র থাকে, তাহাকে **একবর্ণ সন্ন্যাস সমীকরণ** বলে।

যথা $৪স - ৩ = ২স + ১$ ।

যে সমীকরণে একাধিক অব্যক্ত বাশির প্রথম শক্তি মাত্র থাকে তাহাকে **অনেকবর্ণ সন্ন্যাস সমীকরণ** বলে।

যথা, $স + ২ ব = ৫$
 $৩স - ব = ১$ }

যে সমীকরণে একটি মাত্র অব্যক্ত বাশির দ্বিতীয় শক্তি মাত্র থাকে তাহাকে **বিস্তৃত দ্বিশক্তি সমীকরণ** বলে।

যথা $৩স^২ + ২ = ২স^২ + ৪$ ।

যাহাতে একমাত্র অব্যক্ত বাশি থাকে, কিন্তু তাহার প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় শক্তিই থাকে, তাহাকে **মিশ্র দ্বিশক্তি সমীকরণ** বলে।

যথা $২স^২ + ৩স + ৪ = ১৮$ ।

আর এই দ্বিবিধ সমীকরণকেই সংক্ষেপে দ্বিশক্তি সমীকরণ বলে ।

এবং তাহাতে যদি একাধিক অব্যক্ত রাশি থাকে, তবে তাহাকে অনেক বর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ বলে ।

$$\text{যথা } s^2 + s^2 = ৫,$$

$$\text{সম } = ২ ।$$

যে সমীকরণে অব্যক্ত বাশিব তৃতীয়, চতুর্থ, ইত্যাদি শক্তি থাকে তাহাকে ত্রিশক্তি, চতুঃশক্তি, ইত্যাদি সমীকরণ বলে ।

২৬। অব্যক্ত বাশির যে মূল্যে বা যে যে মূল্যে সমীকরণের সাম্য বজায় থাকে, সেই মূল্যকে বা সেই সেই মূল্যকে সমীকরণের আশ্রয় বলে ।

$$\text{যথা } s + ৩ = ৭,$$

এই সমীকরণে $s = ৭ - ৩ = ৪$ হইলেই সাম্য বজায় থাকে,

$$\text{এবং } s^2 + ৩ = ১২,$$

এই সমীকরণে $s^2 = ১২ - ৩ = ৯,$

$$s = +৩ \text{ বা } -৩ \text{ হইলেই}$$

সাম্য বজায় থাকে,

অতএব প্রথম সমীকরণের মান ৪,

$$\text{ও দ্বিতীয় } \dots \dots +৩ \text{ এবং } -৩ ।$$

২৭। সমীকরণ সম্বন্ধীয় দুইটি স্বতঃসিদ্ধ কথা পূর্বেই বলা হইয়াছে (৫ ধারা দ্রষ্টব্য) ।

সেই কথা দুইটি এই—

(১) কোন সমীকরণের উভয়দিকে বা পক্ষে কোন একই রাশি যোগ করিলে বা উভয় পক্ষ হইতে কোন একই রাশি বিয়োগ করিলে সাম্য ঠিক থাকে ।

(২) কোন সমীকরণের উভয়পক্ষ একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে সাম্য ঠিক থাকে ।

যথা, যদি $২স + ৩ = ৭$,

তাহা হইলে $২স + ৩ - ৩ = ৭ - ৩$

এবং $(২স + ৩) \times ৪ = ৭ \times ৪$ ।

প্রথমোক্ত কথাটি নিম্নলিখিতরূপেও বলা যাইতে পারে—

কোন সমীকরণে এক দিকের যে কোন পদ তাহার ঘনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন বিপরীত-রূপে পরিবর্তিত করিয়া অপর দিকে নইয়া গেলে সাম্য ঠিক থাকে ।

যথা, যদি $কস + খ = গস + ঘ$,

তাহা হইলে $কস - গস = ঘ - খ$ ।

কাবণ $কস + খ - খ - গস = গস + ঘ - খ - গস$,

অর্থাৎ $কস - গস = ঘ - খ$ ।

সমীকরণে পদের এই প্রকার দিক বা পক্ষ পরিবর্তনকে সম্মোচন বা পক্ষনস্তন বা পার্শ্ব পরিবর্তন বলে ।

দ্বিত্যোক্ত কথা অনুসারে অনেকস্থলে সমীকরণের আকার সবল করা যায় ।

যথা, যদি $\frac{৩}{৪}স + \frac{৩}{৪} = ২$, $\frac{৩}{৪}স + \frac{৩}{৪} - \frac{৩}{৪} = ২ - \frac{৩}{৪}$,

তাহা হইলে উভয় পক্ষ ১২ দ্বারা গুণ করিলে,

$৩স + ৩ = ১২$ ।

১৮। একবর্ণ সরল সমীকরণ, অনেকবর্ণ সবল সমীকরণ, একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ, ও অনেকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ, এই অধ্যায়ের চারি পরিচ্ছেদে পৃথকভাবে আলোচিত হইবে। অব্যক্ত রাশি ছই অপেক্ষা উচ্চতর শক্তিবিশিষ্ট হইলে সমীকরণের মাননির্ণয় তত সহজ নহে, এবং সে প্রকার সমীকরণ এই সবল বীজগণিতে আলোচিত হইবে না ।

প্রথম পল্লিচ্ছেদ ।

একবর্ণ সরল সমীকরণ ।

২২। একবর্ণ সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়ম ।

আবশ্যকমত গুণন বা ভাগদ্বারা উভয়পক্ষকে সরল আকারে আনিয়া, সমশোধন প্রক্রিয়াদ্বারা অব্যক্ত বাশিগুলি একদিকে ও ব্যক্ত বাশিগুলি অপর দিকে একত্র করিয়া, অব্যক্ত বাশিসমষ্টির প্রকৃতির দ্বারা ব্যক্ত বাশির সমষ্টিকে ভাগ করিলে, সেই ভাগফল সমীকরণেব মান অর্থাৎ অব্যক্ত বাশির পরিমাণ হইবে ।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নেব উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে ।

(১) উদাহরণ ।

$$কস + খ = গস + ঘ,$$

এই সমীকরণের মান নির্ণয় কর ।

সমশোধন দ্বারা দেখা যাইতেছে,

$$কস - গস = ঘ - খ,$$

$$\text{বা } (ক - গ)স = ঘ - খ,$$

$$\therefore \quad স = \frac{ঘ - খ}{ক - গ} ।$$

(২) উদাহরণ ।

$$৩স - ২ = ৫স + ১৬,$$

ইহার মান নির্ণয় কর ।

প্রথমে ১২ দ্বারা উভয় পক্ষগুণ করিয়া,

$$৮স - ২ = ৩স + ১৬ ।$$

তদনন্তর সমশোধনের দ্বারা

$$৮স - ৩স = ১৬ + ২,$$

$$\text{বা } ৫স = ১৮,$$

$$\therefore \quad স = \frac{১৮}{৫} = ৩\frac{৩}{৫} ।$$

- ১০০। একবর্ণ সরল সমীকরণের একটি ও কেবল একটিমাত্র মান থাকে ।

একবর্ণ সরল সমীকরণ আবশ্যিকমত গুণন ও ভাগ ও সমশোধন দ্বারা সর্বত্রই

কম = থ
এই আকারে আনা যায় ।

অতএব $স = \frac{থ}{ক}$ ।

সুতরাং $\frac{থ}{ক}$ এই সমীকরণেব একটি মান ।

মনে কর $\frac{থ}{ক} = ম$,

এবং মনে কর ম' ইহাব আর একটি মান ।

তাহা হইলে কম = থ,

কম' = থ ।

∴ বিভাগ দ্বারা $\frac{ম}{ম'} = \frac{থ}{থ} = ১$,

ম = ম' ,

অতএব ম এবং ম' বিভিন্ন নহে ।

- ১০১। একবর্ণ সরল সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়া দ্বারা অনেক জটিল প্রশ্নের সমাধান হয় ।

প্রশ্ন নানাবিধ হইতে পারে, এবং তাহাব সমাধানার্থে নানাবিধ প্রক্রিয়া প্রয়োগ ও কৌশল অবলম্বন করিতে হয় । তৎসম্বন্ধে কোন সাধাবণ নিয়ম নির্দিষ্ট হইতে পারে না । সে সকল প্রক্রিয়া ও কৌশল অভ্যাস দ্বারা বিত্তার্থীকে শিখিতে হইবে । সাধাবণ রূপে কেবল এই মাত্র বলা যাইতে পারে,—

মনে কর অবাস্তব অর্থাৎ নির্ণেয় রাশির মূল্য স, এবং প্রশ্নানুসারে বাস্তব রাশিদিগের সহিত স এর যেরূপ সম্বন্ধ আছে তাহা বীজগণিতের ভাষায়, অর্থাৎ যোগবিমোগাদি চিহ্নযুক্ত করিয়া, রাশিমানার আকারে লিখ। তাহাতে যে সমীকরণ লিপিবদ্ধ হইবে তাহার মানই স এর মূল্য।

এই কথাগুলি নিম্নের উদাহরণত্রয় দৃষ্টে স্পষ্ট রূপে বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। দুইটি সংখ্যার যোগফল ৩০ এবং বিযোগফল ২০। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর ছোট সংখ্যা = স,

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে বড়সংখ্যা = ৩০ - স,

এবং (৩০ - স) - স = ২০।

∴ ৩০ - ১স = ২০,

∴ ২স = ৩০ - ২০ = ১০,

∴ স = ১০ ÷ ২

= ৫,

এবং অপর সংখ্যা = ৩০ - ৫ = ২৫।

(২) উদাহরণ। কোন ব্যক্তির বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে, ৬ বৎসর পূর্বে তাহার যে বয়স ছিল তাহার তিনগুণ বাদিলে, বিযোগফল ঠিক তাহার বর্তমান বয়সের পবিমাণ হইবে। তাহার বর্তমান বয়স কত?

মনে কর বর্তমান বয়স = স,

তাহা হইলে ৬ বৎসর পূর্বের বয়স = স - ৬,

এবং প্রশ্নানুসারে ২স - ৩(স - ৬) = স।

∴ ২স = ১৮,

∴ স = ৯।

(৩) উদাহরণ। দুই জন পথিক p_1 ও p_2 একদিকে এক পথে ঘণ্টায় m_1 মাইল ও m_2 মাইল হিসাবে চলিতেছে। p_1 যখন k নামক স্থানে উপনীত হয়, তাহাব n ঘণ্টা পবে k_2 নামক স্থানে p_2 উপনীত হয়। k_1 ও k_2 এব ব্যবধান b মাইল। k_2 স্থানে p_2 উপনীত হইবাব কতক্ষণ পরে p_1 তাহাব সহিত মিলিত হইবে? এবং k_2 হইতে কত দূরে?

মনে কব ক এতে প্ৰ উপনীত হইবার স ঘণ্টা পৰে প্ৰ, তাহাৰ সহিত মিলিত হব।

[illegible]

এবং মনে কব অঙ্কিত বেঞ্চাব ক, চিহ্নিত স্থানে তাহার। মিলিত হয়।
তাহা হইলে প্রমাণসাবে,

$k, k_1 = \text{সম}_1,$
 $k, k_2 = (b+s) \text{ম},$
 এবং $k, k_3 = k, k_2 + k_2 k,$
 অর্থাৎ $(b+s) \text{ম}, = b + \text{সম}_1।$
 $s(b, -\text{ম}_1) = b - \text{ম}_1,$
 $s = \frac{b - \text{ম}_1}{\text{ম}_1 - \text{ম}_2}।$
 এবং $k, k_3 = \text{সম}_2 = \frac{\text{ম}_2(b - \text{ম}_1)}{\text{ম}_1 - \text{ম}_2}।$

একণে দেখা যাউক ভিন্ন ভিন্ন স্থলে স এর এই মূল্যের অর্থ কিরূপ হয়।

প্রথমতঃ মনে কর $m_1 > m_2$, এবং $b > am_1$ ।

তাঁরা হইলে স এবং ক, ক, উভয়ই ধনরাশি, এবং প, যখন ক, চিহ্নিত স্থানে আইসে তাহার পনের প, তাহার সহিত মিলিত হইবে। আর তাহাই হওয়া অবশ্যস্বাভাবী।

কারণ, ব অর্থাৎ ক, ক_২ > ঘম,

সুতরাং প_২, ক_২তে আসিবাব সময় প, অবশ্যই ক, ও ক_২ এর মধ্যে কোন এক স্থানে ছিল, অর্থাৎ প, এর পশ্চাতে ছিল। এবং ম_১ > ম_২ অর্থাৎ প, যখন প_২ অপেক্ষা দ্রুত চলিতেছে, তখন প, কিঞ্চিৎ পশ্চাৎ অবশ্যই প_২ এর সহিত মিলিবে। এবং সেট মিলনের স্থানের ক_২ হইতে দূরত্ব অর্থাৎ

$$ক, ক_৩ = \frac{ম_১(ব-ঘম)}{ম_১-ম_২}$$

একটি ধনরাশি, অর্থাৎ ক_৩ স্থান ক_২ স্থানের দক্ষিণেই হইবে।

দ্বিতীয়াংশে মনে কব ম_১ > ম_২ কিন্তু ব < ঘম,

তাহা হইলে স ও ক_২ ক_৩ উভয়ই ঋণবাশি,

এবং প_২ যখন ক_২ চিহ্নিতস্থানে আইসে তাহার পূর্বেই প, এর সহিত তাহাব মিলন হইয়াছিল, এবং মিলনের স্থান ক_৩, ক_২ স্থানের বামে। আর তাহাই হওয়া অবশ্যস্বাভাবিক।

কারণ, ব < ঘম, সুতরাং প, যখন ক_২ স্থানে আইসে তাহাব ঘ ঘণ্টা পরে প, অবশ্যই ক_২ স্থান ছাড়াইয়া গিয়াছে, অর্থাৎ প_২ এর অগ্রে গিয়া পড়িয়াছে। এবং ম_১ > ম_২, অর্থাৎ প, যখন প_২ অপেক্ষা দ্রুত যাইতেছে, তখন প, আব তাহাব সঙ্গে মিলিতে পারিবে না। অতএব প্রথমটি এ স্থলে এইভাবে লইতে হইবে,

যথা—“ক_২ স্থানে প_২ আসিবাব কতক্ষণ পূর্বে ও কোন স্থানে প, এর সহিত তাহাব মিলন হইয়াছিল?”

$$ক, \quad ক_৩ \quad ক_২$$

মনে কব স ঘণ্টা পূর্বে, ও অধিক বেখাব ক_৩ স্থানে, পথিকদ্বয়ের মিলন হইয়াছিল।

তাহা হইলে

$$ক_৩ ক_২ = সম_১,$$

$$ক, ক_৩ = (ব-স, ম_১,$$

$$\text{এবং} \quad ক, ক_৩ = ক, ক_২ - ক_২ ক_৩,$$

অর্থাৎ $(\text{ঘ}-\text{স})\text{ম}_1 = \text{ব}-\text{সম}_2$ ।

∴ $\text{স}(\text{ম}_1, -\text{ম}_2) = \text{ঘম}_1 - \text{ব}$,

$$\therefore \text{স} = \frac{\text{ঘম}_1 - \text{ব}}{\text{ম}_1 - \text{ম}_2}$$

$$\text{এবং ক}_2 \text{ ক}_3 = \text{সম}_2 = -\frac{\text{ম}_2(\text{ঘম}_1 - \text{ব})}{\text{ম}_1 - \text{ম}_2} \quad ।$$

ঋণবাশির এইরূপ অর্থ, পূর্বে ১৪ধাবার বাহা বলা হইয়াছে সেই কথার সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গত বলিয়া দেখা যাইতেছে । অর্থাৎ কালের পরিমাপে ধন-বাশি যদি পূর্ববর্তী কাল বুঝায়, ঋণবাশি পূর্ববর্তী কাল বুঝাইবে, এবং দৈর্ঘ্যের পরিমাপে, ধনবাশি যদি দক্ষিণে দৈর্ঘ্য বুঝায়, ঋণবাশি বামে দৈর্ঘ্য বুঝাইবে ।

তৃতীয়তঃ মনে কব $\text{ম}_1 < \text{ম}_2$ এবং $\text{ব} < \text{ঘম}_1$ ।

তাহা হইলে $\text{ব}-\text{ঘম}_1$ এবং $\text{ম}_1, -\text{ম}_2$ উভয়ই ঋণবাশি হওয়াতে স ও $\text{ক}_2 \text{ ক}_3$ উভয়ই ধনবাশি হইতেছে, এবং প_1 , ক_2 স্থানে আসিবাব পৰ ক_2 স্থানের দক্ষিণে প_1 এর সঙ্গে মিলিবে । আব তাহাই হওয়া অবশ্যস্বাবী ।

কারণ, ব অর্থাৎ $\text{ক}_2 \text{ ক}_3 < \text{ঘম}_1$, সুতরাং প_1 যখন ক_2 স্থানে আইসে তাহার ষ ঘণ্টা পবে প অবশ্যই ক_2 ছাড়াইয়া গিয়াছে, অর্থাৎ প_2 এর আগে গিয়াছে । এবং $\text{ম}_1 < \text{ম}_2$, অর্থাৎ প_2 যখন প_1 অপেক্ষা দ্রুত যাইতেছে, তখন কিঞ্চিৎ পরে প_2 অবশ্যই প_1 এর সহিত মিলিবে । আব সেই মিলনের স্থান অবশ্যই ক_2 এর দক্ষিণে হইবে ।

চতুর্থতঃ মনে কব $\text{ম}_1 = \text{ম}_2$, কিন্তু $\text{ব} > \text{ঘম}_1$ ।

তাহা হইলে $\text{স} = \frac{\text{ব}-\text{ঘম}_1}{\text{ম}_1 - \text{ম}_2} = \infty$ (পাটীগণিতের ৪৬ ধারা দ্রষ্টব্য) ।

ইহাব অর্থ এই যে প_1 ও প_2 কখনই মিলিবে না ।

আব তাহাই অবশ্যস্বাবী ।

কারণ, ব অর্থাৎ $\text{ক}_2 \text{ ক}_3 > \text{ঘম}_1$, সুতরাং প_2 , ক_2 তে আসিবাব সময় প_1 অবশ্যই ক_2 ও ক_3 এর মধ্যে কোন একস্থানে ছিল । এবং $\text{ম}_1 = \text{ম}_2$, সুতরাং প_1 ও প_2 সমান বেগে চলিতেছে । অতএব কেহই অপরকে ধ্বিবে পারিবে না । এবং $\text{স} = \infty$

এই কথা এই ভাবে বলিতেছে যে “অনন্ত কাল পবে উভয়ে মিলিবে ।”

সর্বশেষে, মনে কব $m_1 = m_2$, $v = \text{ঘম}$ । তাহা হইলে $s = \frac{1}{2}$ । এখন দেখা যাউক s এর মূল্য এই আকার ধারণ করার অর্থ কি।

$v = \text{ঘম}$, সুতবাং p_2 বখন k_2 এতে আসিয়াছে, অর্থাৎ p_2 বখন k_2 এতে আসিয়াছিল তাহার v ঘণ্টা পরে, p_1 ও k_2 এতে আসিয়াছে। অতএব p_1 ও p_2 , k_2 এতে মিলিয়াছে। এবং $m_1 = m_2$, অতএব উভয়ে সমান বেগে চলিতেছে, এবং সর্বদাই মিলিত থাকিবে। সুতবাং

s এর কোন নির্দিষ্ট মূল্য নাই, যে কোন মূল্য দিলেই চলিবে।

অতএব $\frac{1}{2}$ এই আকার s ধারণ করার অর্থ এই যে তাহার কোন নির্দিষ্ট মূল্য নাই।

এই উদাহরণটি বিশেষ শিক্ষাপ্রদ, এবং উপবে যে কথাগুলি বলা হইল, শিক্ষার্থী তাহা ভালরূপে বুঝা ও মনে বাণী কর্তব্য।

১০২। উপবে (৩) উদাহরণের চতুর্থ ও শেষ কথা সাধারণ ভাবে নিম্নলিখিতরূপে দেখিলে আবও স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

একবর্গ সবল সমীকরণের সাধারণ আকার এই—

$$kx = x^2$$

$$\therefore s = -\frac{x}{k}$$

$$\text{যদি } k = 0,$$

$$\text{তবে } s = \frac{x}{0} = \infty$$

কারণ • কে কোন সসীম বাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল • ভিন্ন আব কিছু হয় না।

$$\text{যদি } k = 0, x = 0,$$

$$\text{তাহা হইলে } 0 \times s = 0$$

$$\text{ও } s = \frac{0}{0}$$

অর্থাৎ s এর কোন নির্দিষ্ট মান নাই, কারণ, s বাহাই হউক $0 \times s = 0$ হইবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ ।

একাধিক বর্ণ সরল সমীকরণ ।

১০৩। পূর্বে (১০০ ধারায়) বলা হইয়াছে একবর্ণ সরল সমীকরণের একটি ও কেবল একটি মাত্র মান থাকে ।

একাধিকবর্ণ সরল সমীকরণ যদি একটি থাকে তাহা হইলে তাহার অব্যক্ত রাশিগণের প্রত্যেকের অনেক মান থাকিতে পারে ।

যথা হুনে কব

$$কস + থব = গ,$$

দ্বিবর্ণ এই একটি মাত্র সমীকরণ আছে ।

উহাতে যএব যে কোন মান $ক$ নির্দেশ করিলে সমীকরণ এই আকার ধারণ করিবে—

$$কস + থম = গ ।$$

এবং এই শেষোক্ত সমীকরণ হইতে $স$ এব একটি মান নিরূপিত হইবে ।

এইরূপে যএর যে কোন মান নির্দেশ করিয়া তদনুযায়ী $স$ এর এক একটি মান পাওয়া যাইবে ।

কিন্তু যদি দুইটি অব্যক্ত রাশিবৃত্ত দুইটি সমীকরণ একসঙ্গে থাকে,

$$যথা, ক, স + থ, ব = গ, \quad (১)$$

$$ক, স + থ, ব = গ, \quad (২)$$

তাহা হইলে দেখা যাইবে,

ঐরূপ ঘটিতে পারে না, এবং প্রত্যেক অব্যক্ত রাশির সাধারণতঃ একটি নির্দিষ্ট মান থাকিবে ।

এইরূপ একত্র স্থিত দুইটি বা ততোধিক সমীকরণকে **সামান্য সমীকরণ** বা **সামান্য সমীকরণ** বলে ।

১০৪। সমসাময়িক সরল সমীকরণের মান নির্ণয়ের তিনটি প্রণালী আছে । কিন্তু তাহার মূলে একই, ও প্রত্যেকের উদ্দেশ্য বিবোপ বা বিভাগ দ্বারা অপর অব্যক্ত রাশিগুলিকে **অপনীত** করিয়া একটি অব্যক্ত রাশিবিধিট একটি সমীকরণে উপনীত হওয়া ।

১৫। (১) দ্বিবর্গ সমসাময়িক সরল সমীকরণের মান নির্ণয়ের প্রথমাংশ প্রণালী।

$$\text{মনে কর } ক, স + খ, ব = গ; \quad \dots \quad (১)$$

$$ক_২ স + খ_২ ব = গ_২ \quad \dots \quad (২)$$

এই দুইটি সমীকরণ আছে।

প্রথমটিকে $খ_২$ দিয়া ও দ্বিতীয়টিকে $খ$, দিয়া গুণ করিলে

$$ক, খ_২ স + খ, খ_২ ব = খ_২ গ, \dots \quad (৩)$$

$$ক_২ খ, স + খ, খ_২ ব = খ, গ_২ \dots \quad (৪)$$

এক্ষণে (৩) হইতে (৪) বাম দিলে ব অপসৃত হইবে,

$$\text{এবং } (ক, খ_২ - ক_২ খ,) স = খ_২ গ, - খ, গ_২ \dots \quad (৫)$$

$$\therefore \quad স = \frac{খ_২ গ, - খ, গ_২}{ক, খ_২ - ক_২ খ,}।$$

এবং এইরূপে (১) কে $ক_২$ দিয়া ও (২) কে $ক$, দিয়া গুণ কবিত্তা প্রথম গুণফলকে দ্বিতীয় গুণফল হইতে বাম দিয়া দেখা যায়

$$ব = \frac{ক, গ_২ - ক_২ গ,}{ক, খ_২ - ক_২ খ,}।$$

এই প্রণালী প্রয়োগের একটি সহজ উদাহরণ দেওয়া যাউক।

$$স + ২ব = ৫ \quad \dots \quad (১)$$

$$২স + ৩ব = ৮ \quad \dots \quad (২)$$

(১) কে ২ দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণফল হইতে

(২) বাম দিলে

$$ব = ২,$$

এবং ব এর স্থলে ২ সংস্থাপন দ্বারা (১) হইতে

$$স + ৪ = ৫,$$

$$\therefore \quad স = ৫ - ৪ = ১।$$

(২) দ্বিতীয়াংশ প্রণালী। সমীকরণদ্বয়ের কোন একটি হইতে একটি অব্যক্ত রাশির মান, অপর অব্যক্ত রাশিটিকে ব্যক্ত রাশি মনে কবিত্তা,

নির্ণয় কব, এবং সেই মান অপর সমীকরণে সেই বাশির স্থানে সংস্থাপিত কব। তাহা হইলে এক অব্যক্ত রাশি-বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাইবে, এবং তাহা হইতে সেই বাশির মান নিরূপিত হইবে। তদনন্তর সেই মান সমীকরণদ্বয়ের যে কোনটিতে সেই রাশির স্থলে সংস্থাপিত করিয়া অপর অব্যক্ত বাশির মান নিরূপিত হইবে।

উদাহরণ।

$$৩স + ২ব = ১২ \quad \dots (১)$$

$$৩স + ৩ব = ১০ \quad (২)$$

$$(১) \text{ হইতে} \quad ব = \frac{১২ - ৩স}{২}$$

$$\therefore (২) \text{ হইতে } ৩স + ৩ \times \frac{১২ - ৩স}{২} = ১০,$$

$$\therefore ৬স + ৩৬ - ৯স = ২০,$$

$$\therefore ৫স = ১৬,$$

$$\therefore স = ২।$$

$$\therefore (১) \text{ হইতে} \quad ৬ + ২ব = ১২,$$

$$\therefore ২ব = ৬,$$

$$\therefore ব = ৩।$$

(৩) তৃতীয় প্রশ্নালী।

অব্যক্ত রাশি-ব মধ্যে কোন একটির মান অপর অব্যক্ত রাশিকে ব্যক্ত মনে করিয়া উভয় সমীকরণ হইতে নির্ণয় করিয়া, সেই দুইটি মানকে সমান বলিয়া লিখিলে, শেষোক্ত অব্যক্ত রাশি-বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত বাশির মান নির্ণয় করিয়া, প্রথমতঃ সমীকরণের কোন একটিতে সেই মান সংস্থাপন করিলে অপর অব্যক্ত রাশির মান নির্ণীত হইবে।

উদাহরণ ।

$$৪স + ৩ঘ = ২৪ \quad (১)$$

$$৩স + ২ঘ = ১৭ \quad (২)$$

$$(১) \text{ হইতে } \quad ঘ = \frac{২৪ - ৪স}{৩},$$

$$(২) \text{ হইতে } \quad ঘ = \frac{১৭ - ৩স}{২},$$

$$\therefore \quad \frac{২৪ - ৪স}{৩} = \frac{১৭ - ৩স}{২},$$

$$\therefore \quad ৪৮ - ৮স = ৫১ - ৬স,$$

$$\therefore \quad স = ৩,$$

$$\therefore \quad (১) \text{ হইতে } ১০ + ৩ঘ = ২৪,$$

$$\therefore \quad ঘ = \frac{২৪ - ১২}{৩} = ৪।$$

১০৬। উপরে (১০৩ ধারায়) বলা হইয়াছে

ছুইটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট ছুইটি সনীকরণ থাকিলে উভয় অব্যক্ত রাশিরই সাধারণতঃ একটি নির্দিষ্ট মান থাকে।

কিন্তু সনীকরণ ছুইটি পরস্পর ~~অসঙ্গত~~ অসঙ্গত না হইলে

তাহা হইতে অব্যক্ত রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় হয় না।

তাহার উদাহরণ নিম্নে দিয়া, পবে তাহার হেতু নির্দেশ করা যাইবে।

$$\text{মনে কর} \quad ২স + ৩ঘ = ৪ \quad (১)$$

$$৪স + ৬ঘ = ৮ \quad (২)$$

এ স্থলে (১) কে ২ দিয়া গুণ করিয়া গুণফল (২) হইতে বাদ দিলে

$$০ = ০,$$

এই মাত্র পাওয়া যায়, এবং তাহা হইতে স অথবা ঘ কাহারই মান নির্ণয় করা যায় না।

আবার (১) হইতে

$$স = \frac{৪-৩ব}{২},$$

এবং স এ ব এই মান (২) এতে সংস্থাপন করিলে

$$২ \times (৪-৩) ব + ৬ব = ৮,$$

অর্থাৎ

$$৮ = ৮,$$

এই মাত্র পাওয়া যায়, এবং তদ্বারা স অথবা ব নির্ণয়ের কোন উপায় হয় না।

এবং (১) ও (২) উভয় হইতে স এ ব মান নির্ণয় কবিরূপে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহা এই—

$$স = \frac{৪-৩ব}{২} = \frac{৮-৬ব}{৪},$$

অর্থাৎ

$$৮-৬ব = ৮-৬ব,$$

অর্থাৎ

$$০ = ০।$$

সুতরাং তদ্ব্যবাপ স এর এবং ব এর মান নির্ণয়ের কোন উপায় হয় না।
অতএব ১০৫ ধারাব কোন প্রশ্নালীই ফলদায়ক হইল না।

এবং তাহাই হইবার কথা। কারণ, এস্থলে (১) ও (২) দুইটি পৃথক ও স্বাধীন সমীকরণ নহে। দ্বিতীয়টি প্রথমটির রূপান্তর মাত্র, এবং প্রথমটিকে ২ দ্বারা গুণ কবাব ফল। সুতরাং এ স্থলে একটি মাত্র সমীকরণ $৩স + ২ব = ১২$, আছে, এবং স ও ব এর কোন নির্দিষ্ট মান নাই।

$$স = ১ \text{ হইলে, } ব = ৪\frac{১}{২}, \text{ } স = ২ \text{ হইলে, } ব = ৩,$$

$$স = ৩ \text{ হইলে, } ব = ১\frac{১}{২}, \text{ } স = ৪ \text{ হইলে, } ব = ০, \text{ ইত্যাদি।}$$

আবার মনে কব

$$২স + ৩ব = ৪ \quad (১)$$

$$৩স + ৪ব = ৪ \quad (২)$$

তাহা হইলে, $স + ব = ০$,

এবং $s = ০$, $v = ০$ অথবা $s = অ$, $v = -$ অ শেযোক্ত সমীকরণের মান হইতেছে, কিন্তু তাহা (১) ও (২) এর মান নহে, কারণ $s = ০$ বা $অ$, $v = ০$ বা $-$ অ হইলে (১) ও (২) কোনটিরই সাম্য বজায় থাকে না।

এবং s ও v এর এমন কোন মান নাই যদ্বারা (১) ও (২) বজায় থাকে। আর তাহার কারণ এই যে (১) ও (২) পরস্পর সম্ভব নহে।

যদি $২s + ৩v = ৪$, হয়, তবে

$৩s + ৪v = ৪$ হইতে পারে না।

১০৭। পূর্বে বলা হইয়াছে, দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণ দুইটি পরস্পর সাম্যমান ও সম্ভব হইলে তবে অব্যক্ত রাশিযের নির্দিষ্ট মান থাকিবে, নতুবা তাহা থাকিবে না। এবং তাহাব উদ্ধাহরণও উপরে দেওয়া গিয়াছে। এক্ষণে সেই কথা সাধাবণ ভাবে সপ্রমাণ করা বাইতেছে।

দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণের সাধারণ আকার এইরূপ,

$$কs + থv = গ।$$

মনে কর সমীকরণ দুইটি এই—

$$ক_১s + থ_১v = গ_১, \quad (১)$$

$$ক_২s + থ_২v = গ_২ \quad (২)$$

$$\text{তাহা হইলে } s = \frac{থ_১গ_২ - থ_২গ_১}{ক_১থ_২ - ক_২থ_১},$$

$$v = \frac{ক_১গ_২ - ক_২গ_১}{ক_১থ_২ - ক_২থ_১}।$$

এখন যদি $ক_১থ_১ - ক_২থ_১ = ০$

এবং $থ_১গ_১ - থ_২গ_১ = ০$ না হইয়া = n হয়,

ও $ক_১গ_২ - ক_২গ_১ = ০$ না হইয়া = m হয়,

তাহা হইলে $s = \frac{n}{০}$, $v = \frac{m}{০}$ হইবে, অর্থাৎ s ও v এর কোন সসীম মান

থাকিতে পারে না, তাহার উত্তরই $= \infty$ ।

দেখা যাউক ইহার কারণ কি।

$$ক_১খ_২ - ক_২খ_১ = ০$$

$$\therefore ক_১খ_২ = ক_২খ_১$$

$$\therefore \frac{ক_১}{ক_২} = \frac{খ_১}{খ_২} = চ \text{ মনে কর।}$$

তাহা হইলে $ক_১ = চক_২$, $খ_১ = চখ_২$,

এবং (১) এই আকার ধারণ করিবে,

$$চক_২স + চখ_২ঘ = গ_১, \quad \dots \quad (৩)$$

$$\therefore ক_২স + খ_২ঘ = \frac{গ_১}{চ} \quad \dots \quad (৪)$$

কিন্তু $ক_১গ_২ - ক_২গ_১ = ০$ নহে, $\therefore \frac{গ_১}{গ_২} = \frac{ক_১}{ক_২} = চ$ নহে।

$\therefore গ_১ = \frac{গ_২}{চ}$ নহে। সুতরাং

(২) ও (৪) সমীকরণদ্বয় অসঙ্গত হইতেছে। কারণ,

$$ক_২স + খ_২ঘ = গ_২ \text{ এবং } = \frac{গ_১}{চ},$$

অর্থাৎ $ক_২স + খ_২ঘ$ দুইটি ভিন্ন ভিন্ন রাশির সহিত সমান হইতে পারে না।

এবং (৪) সমীকরণ (৩) এর রূপান্তর মাত্র,

ও (৩) সমীকরণ (১) এর রূপান্তর মাত্র।

সুতরাং প্রস্তাবিত সমীকরণ (১) সমীকরণ (২) এর সহিত অসঙ্গত হইতেছে।

অর্থাৎ তাহাদের মধ্যে (১) এর বাম পক্ষ (২) এর বাম পক্ষের চ গুণ হইতেছে, কিন্তু (১) এর দক্ষিণ পক্ষ (২) এর দক্ষিণ পক্ষের চ গুণ হইতেছে না। এই অসঙ্গত ভাব স ও ঘ এর কোন সসীম মান দ্বারা সঙ্গত করা যায় না।

$$\text{এবং } স = \frac{০}{০} = \infty, \text{ ঘ} = \frac{০}{০} = \infty,$$

ইহার অর্থ এই যে উপরিউক্ত অসঙ্গত ভাব কেবল অনন্তেই সঙ্গত হইতে পারে।

এই স্থানে কুমারসম্ভবের দ্বিতীয়সর্গে ঋষিগণের শোভার একটি শ্লোক স্মরণ করিবার যোগ্য।

“এব ঘূঢ়, স্থলস্থল, লঘু কিত্ত গুরু ।
ব্যক্তাব্যক্ত, অসম্ভব সম্ভব তোমাতে ।”^১

$$\begin{aligned} ১০৮। \quad & \text{মনে কব } ক_১খ_২ - ক_২খ_১ = ০, \\ \text{এবং} \quad & \text{খ}_২গ_১ - খ_১গ_২ = ০, \\ \text{ও} \quad & \text{ক}_১গ_২ - ক_২গ_১ = ০। \end{aligned}$$

তাহা হইলে $স = \frac{\cdot}{\cdot}$, $ব = \frac{\cdot}{\cdot}$,

অর্থাৎ স ও ব এর কোন নির্দিষ্ট মান নাই ।

সেথা যাউক ইহার কারণ কি ।

উপবে যে অনুমান কবা গিয়াছে
তদনুসারে,

$$\frac{ক_১}{ক_২} = \frac{খ_১}{খ_২} = \frac{গ_১}{গ_২} = চ।$$

$$\therefore ক_১ = চক_২, খ_১ = চখ_২, গ_১ = চগ_২।$$

সুতরাং (১) সমীকরণ এই আকার ধারণ করিতেছে—

$$চক_২স + চখ_২ব = চগ_২।$$

$$\therefore ক_২স + খ_২ব = গ_২।$$

অর্থাৎ (১) ও (২) দুইটি পবম্পব স্বাধীন সমীকরণ নহে, প্রথমটি দ্বিতীয়টিকে চ দ্বারা গুণ করিলেই পাওয়া যায় । সুতরাং এস্থলে বস্তুতঃ দ্বিবর্ণ সমীকরণ একটিমাত্র আছে, অতএব অব্যক্ত রাশিদ্বয়ের কোন নির্দিষ্ট মান থাকিতে পারে না । স এবং বের কোন মান লইয়া তদনুযায়ী ব এর এক একটি মান নিরূপিত হইতে পারে ।

১। দ্রঃ: সঙ্কামকটিল-জ্ঞান-দুখী অনুরূপ ।

আর্য্যী আর্য্যী মৎস্যান্তি দ্বাভ্যর্থ্য নী বিমুক্তিঃ ॥

১০২। ত্রিবর্ণ সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়ম সঙ্ক্ষেপে এই।--

এইরূপ স্থলে যে তিনটি সমীকরণ থাকে তাহাদের মধ্যে দুইটি হইতে দুইটি অব্যক্ত বাশিব মানধ্ব (তৃতীয় অব্যক্ত বাশিকে ব্যক্ত মনে করিয়া) ১০৫ ধাবার দর্শিত প্রণালী অনুসারে নিরূপণ কব। তাহার পর সেই নিরূপিত মানধ্ব সেই রাশিদ্বয়ের স্থলে তৃতীয় সমীকরণে সংস্থাপিত করিলে কেবল তৃতীয় অব্যক্ত রাশিবিধিষ্ট একটি সমীকরণ পাইবে, এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত বাশির মান নির্ণীত হইবে। তদনন্তর এই শেবোক্ত মান সেই অব্যক্ত রাশির স্থলে প্রথমোক্ত সমীকরণদ্বয়ে সংস্থাপিত করিয়া অপর দুইটি অব্যক্ত রাশিব মান নিরূপণ কব।

উপবেব নিয়মটি সহজে খাটাইবার নিমিত্ত নিম্নেব ধাবাব কথাগুলি স্বরণ বাখা আবশ্যক।

১১০। মনে কব

$$ক, স + থ, ঘ + গ, ল - ঘ, \quad (১)$$

$$ক_২ স + থ_২ ঘ + গ_২ ল = ঘ_২ \dots (২)$$

$$ক_৩ স + থ_৩ ঘ + গ_৩ ল = ঘ_৩ \dots (৩)$$

সমীকরণ (২) কে ল দিয়া, ও (৩) কে ম দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণিত সমীকরণদ্বয় (১) এর সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে

$$(ক, + ক_২ ল + ক_৩ ম)স + (থ, + থ_২ ল + থ_৩ ম)ঘ + (গ, + গ_২ ল + গ_৩ ম)ল = ঘ, + ঘ_২ ল + ঘ_৩ ম \quad (৪)$$

এখন মনে কব

$$থ, + থ_২ ল + থ_৩ ম = ০,$$

$$গ, + গ_২ ল + গ_৩ ম = ০,$$

তাহা হইলে (১০৫ ধাবার প্রথম প্রণালী অবলম্বন দ্বারা)

$$\frac{ল}{খ_৩ গ_১ - থ_৩ গ_৩} = \frac{ম}{খ_১ গ_২ - থ_২ গ_১} = \frac{১}{খ_২ গ_৩ - থ_৩ গ_২} = ৫$$

(মনে কর)...(৫)

একপে (৫) হইতে নির্ণীত ল ও মএব মান (৪) এতে সংস্থাপিত করিলে,

$$(ক_১ + ক_২ ল + ক_৩ ম) স = ঘ_১ + ঘ_২ ল + ঘ_৩ ম,$$

$$\text{অথবা } \{ক_১(খ_২ গ_৩ - খ_৩ গ_২)\}চ + ক_২(খ_৩ গ_১ - খ_১ গ_৩)\}চ$$

$$+ ক_৩(খ_১ গ_২ - খ_২ গ_১)\}চ\}স$$

$$= ঘ_১(খ_২ গ_৩ - খ_৩ গ_২)\}চ + ঘ_২(খ_৩ গ_১ - খ_১ গ_৩)\}চ$$

$$+ ঘ_৩(খ_১ গ_২ - খ_২ গ_১)\}চ ।$$

$$\therefore স = \frac{ঘ_১(খ_২ গ_৩ - খ_৩ গ_২) + ঘ_২(খ_৩ গ_১ - খ_১ গ_৩) + ঘ_৩(খ_১ গ_২ - খ_২ গ_১)}{ক_১(খ_২ গ_৩ - খ_৩ গ_২) + ক_২(খ_৩ গ_১ - খ_১ গ_৩) + ক_৩(খ_১ গ_২ - খ_২ গ_১)} ।$$

এবং ঐরূপে ব ও শ এব মান জানা যাইবে ।

দেখা যাইতেছে, সএব মূল্য হইতে বএব মূল্য নির্ণয় কবিত্তে হইলে ক_১, ক_২, ও ক_৩ এর স্থানে খ_১, খ_২, ও খ_৩ লিখিতে হইবে ।

এবং সএর মূল্য হইতে শএব মূল্য নির্ণয় করিত্তে হইলে ক_১, ক_২, ও ক_৩ স্থানে গ_১, গ_২, গ_৩ লিখিতে হইবে । এবং তিনটির মূল্যই হয় একই থাকিবে ।

১১১। দুই তিন ইত্যাদি সমীকরণ হইতে এক, দুই ইত্যাদি অব্যক্ত বাশির অপসারণই সমবর্তী সমীকরণ সমাধানের মূল প্রক্রিয়া । অন্তএব বাশি অপসারণ সম্বন্ধে দুই একটি কথা স্মরণার্থে এই স্থানে বিশেষ করিয়া বলা আবশ্যক ।

$$১ম। \text{ যদি } ক_১ স + খ_১ = ০ \quad (১)$$

$$ক_২ স + খ_২ = ০ \quad (২)$$

$$\text{তাহা হইলে (১) হইতে } স = -\frac{খ_১}{ক_১}$$

$$(২) \text{ হইতে } স = -\frac{খ_২}{ক_২}$$

$$\therefore -\frac{খ_১}{ক_১} = -\frac{খ_২}{ক_২}, \quad \therefore ক_১ খ_২ = ক_২ খ_১,$$

$$\text{এবং } ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১ = ০ \quad (৩)$$

অর্থাৎ (১) ও (২) একসঙ্গে সত্য হইতে গেলে (৩) সত্য হওয়া আবশ্যক ।

$$২য়। \text{ যদি } ক_১স + খ_১ব = গ_১ \quad (৪)$$

$$ক_২স + খ_২ব = গ_২ \quad \dots \quad (৫)$$

তাহা হইলে (১০৫ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$\frac{স}{খ_১গ_১ - খ_২গ_২} = \frac{ব}{গ_২ক_১ - গ_১ক_২} = \frac{১}{ক_১খ_২ - ক_২খ_১} \quad \dots (৬)$$

$$৩য়। \text{ } ক_১স + খ_১ব = গ_১ \dots (৭)$$

$$ক_২স + খ_২ব = গ_২ \quad (৮)$$

$$ক_৩স + খ_৩ব = গ_৩ \quad (৯)$$

তাহা হইলে ১০৫ ধারা মতে (৭) ও (৮) হইতে স ও বএর মান স্থির করিয়া তাহা (৯) সমীকরণে সংস্থাপিত করিলে

$$ক_৩ \cdot \frac{খ_১গ_১ - খ_২গ_২}{ক_১খ_২ - ক_২খ_১} + খ_৩ \cdot \frac{ক_১গ_২ - ক_২গ_১}{ক_১খ_২ - ক_২খ_১} = গ_৩$$

$$\therefore ক_৩(খ_১গ_১ - খ_২গ_২) + খ_৩(ক_১গ_২ - ক_২গ_১) - গ_৩(ক_১খ_২ - ক_২খ_১) = ০ \dots (১০)$$

$$৪র্থ। \text{ যদি } ক_১স + খ_১ব + গ_১শ = ০ \quad (১১)$$

$$ক_২স + খ_২ব + গ_২শ = ০ \quad (১২)$$

$$ক_৩স + খ_৩ব + গ_৩শ = ০ \quad (১৩)$$

তাহা হইলে (১১) ও (১২) হইতে শ অপসারণ দ্বারা

$$(ক_১গ_২ - ক_২গ_১)স + (খ_১গ_২ - খ_২গ_১)ব = ০,$$

$$\therefore স(গ_১ক_২ - গ_২ক_১) = ব(খ_১গ_২ - খ_২গ_১),$$

$$\therefore \frac{স}{খ_১গ_২ - খ_২গ_১} = \frac{ব}{গ_১ক_২ - গ_২ক_১} \quad ।$$

এক্সপ্রেস (১১) ও (১২) হইতে ব অপসারণ দ্বারা

$$\frac{স}{খ_১গ_২ - খ_২গ_১} = \frac{শ}{ক_১খ_২ - ক_২খ_১} \quad ।$$

$$\therefore \frac{স}{খ_১গ_২ - খ_২গ_১} = \frac{ব}{গ_১ক_২ - গ_২ক_১} = \frac{শ}{ক_১খ_২ - ক_২খ_১} = ৮$$

(মনে কর) (১৪)

এবং স, ব, ও শ এর (১৪) হইতে প্রাপ্ত মূল্য (১৩) তে সংস্থাপিত করিয়া ৫ এর মূল্য জানা বাইবে, আবার তাহার পর (১৪) হইতে

স, ব, ও শ এর নির্দিষ্ট মান নির্ণীত হইবে।

১১২। এক্ষণে একাধিকবর্গ সমবর্তী সৰল সমীকরণেব দুইটি উদাহরণেব ও তৎসংক্রান্ত তিনটি প্রশ্নের সমাধান করা বাইবে।

(১) উদাহরণ। $\frac{স}{৪} + \frac{ব}{৫} + ১ = \frac{স}{৫} + \frac{ব}{৪} = ২৩।$

এস্থলে সমীকরণ দুইটি এই—

$$\frac{স}{৪} + \frac{ব}{৫} + ১ = ২৩, \text{ এবং } \frac{স}{৫} + \frac{ব}{৪} = ২৩,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{অর্থাৎ } \frac{স}{৪} + \frac{ব}{৫} = ২৩ - ১ = ২২ \\ \frac{স}{৫} + \frac{ব}{৪} = ২৩ \end{array} \right\}$$

অর্থাৎ $৫স + ৪ব = ৪৪০$ (১)

$৪স + ৫ব = ৪৬০$ (২)

∴ (১) হইতে (২) বিয়োগ দ্বারা

$$স - ব = -২০$$

∴ $স = ব - ২০,$

∴ (১) হইতে $৫ব - ১০০ + ১ব = ৪৪০$

∴ $৬ব = ৫৪০$

∴ $ব = ৯০$

এবং $স = ৬০ - ২০ = ৪০।$

(২) উদাহরণ। $স - ব + শ = ১$ (১)

$স - ২ব + ৪শ = ৮$ (২)

$স - ৩ব + ৯শ = ২৭$ (৩)

(১) হইতে (২) বাম দিয়া $ব - ৩শ = -৭$ (৪)

$$(২) \text{ হইতে } (৩) \text{ বাদ দিয়া } ৪ - ৫x = -১২ \quad (৫)$$

$$(৪) \text{ হইতে } (৫) \text{ বাদ দিয়া } ২x = ১০,$$

$$\therefore x = ৫।$$

$$\therefore (৪) \text{ হইতে } ৪ = ৩ \times ৫ - ৭ = ১১,$$

$$\text{এবং } (১) \text{ হইতে } ৪ = ১ + ১১ - ৬ = ৬।$$

এই দুইটি উদাহরণ অতি সহজ, এই জন্ত ইহাতে ১০৫ বা ১১০
ধাবাব কোন সাঙ্কেতিক বাক্যের প্রয়োগের প্রয়োজন হইল না।

দ্বিতীয় উদাহরণটির ১১০ ধাবাব নিয়মানুসারে সমাধান কবিত্তে গেলে

$$-১ - ২ল - ৩ম = ০$$

$$১ + ৪ল + ৯ম = ০$$

$$\text{তাহা হইলে } -২ল = ২, \therefore ল = -১,$$

$$\text{এবং } \therefore ম = \frac{২}{৩}।$$

$$\therefore (১ + ১ \times (-১) + ১ \times \frac{২}{৩}) ১ = ১ + ৮ \times (-১) + ২৭ \times \frac{২}{৩},$$

$$\therefore \frac{২}{৩} ১ = ০, \therefore ১ = ০।$$

$$\therefore (১) \text{ হইতে } - ৪ + ৭ = -৫,$$

$$(২) \text{ হইতে } - ২৪ + ৪৭ = ২।$$

$$\therefore ২৪ = ২২, \text{ এবং } ৪ = ১১।$$

$$\therefore (১) \text{ হইতে } ৭ = ১ - ৬ + ১১ = ৬।$$

(৩) উদাহরণ। একটি বৃক্ষে কএকটি শুকপক্ষী ও আর একটি বৃক্ষে
আর কএকটি শুকপক্ষী বসিয়া আছে, এবং দেখা গেল, যদি প্রথম বৃক্ষ
হইতে দ্বিতীয় বৃক্ষে একটি পক্ষী উড়িয়া আসে তবে দ্বিতীয় বৃক্ষের পক্ষীর
সংখ্যা প্রথম বৃক্ষের পক্ষীর সংখ্যার দ্বিগুণ হইবে, কিন্তু যদি দ্বিতীয় হইতে
প্রথম বৃক্ষে একটি পক্ষী উড়িয়া বাইত তাহা হইলে উভয় বৃক্ষে পক্ষীর
সংখ্যা সমান হইত। কোন বৃক্ষে ক'টি পক্ষী ছিল ?

$$\text{মনে কর প্রথম বৃক্ষে পক্ষীর সংখ্যা} = x,$$

$$\text{দ্বিতীয় } = y।$$

তাহা হইলে প্রাপ্তসারে

$$x+1=2 \times (s-1),$$

$$x-1=s+1 \quad |$$

$$\text{অর্থাৎ } \left. \begin{aligned} x+1 &= 2s-2 \\ x-1 &= s+1 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore 2 = s-3, \therefore s=5,$$

$$\text{এবং } x = s+2 = 5+2 = 7।$$

৪র্থ উদাহরণ । দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা সেই অঙ্কদ্বয়ের যোগফলেব চতুর্গুণ, এবং অঙ্কদ্বয়ের একেব স্থানে অপরটিকে লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা সেই মূল সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা ৯ কম । সেই মূল সংখ্যাটি কি ?

মনে কর এককের দ্বয়ের অঙ্ক = s ,

দশকের = x ।

তাহা হইলে সংখ্যাটি = $10x+s$

এবং অঙ্কের স্থান পরিবর্ত্ত করিলে সংখ্যাটি $10s+x$ ।

অতএব প্রাপ্তসারে $10x+s=8(x+s)$,

$$10x+s=(10x+s) \times 2+9।$$

$$\text{অর্থাৎ } 6x-9s=0 \quad \dots (1)$$

$$12x-18s=0 \quad \dots (2)$$

.. (২) কে ৩ দ্বারা গুণ করিয়া তাহা হইতে (১) কে ৮ দ্বারা গুণ

করিয়া বাদ দিলে, $49x-18x=27$,

$$\therefore 22x=27, \therefore x=3।$$

এবং $\therefore (1)$ হইতে $9s=6 \times 3=18$, ও $s=2$ ।

$$\therefore \text{মূল সংখ্যা} = 36।$$

(৫) উদাহরণ । কএর বয়স খএর দ্বিগুণ ও গএর অপেক্ষা ৪ বৎসর অধিক । এবং ক, খ, ও গ তিন জনের বয়স একত্র করিলে ৯৬ বৎসর । খএর বয়স কত ?

মনে কব খএর বয়স = স বৎসর,

গএর ... = ব .. ,

তাহা হইলে কএর .. = ২স ।

∴ প্রত্যাহসারে, $২স = ব + ৪$,

$$২স + স + ব = ৯৬ ।$$

∴ $২স - ব = ৪$,

$$৩স + ব = ৯৬ ।$$

∴ যোগদ্বারা $৫স = ১০০$,

$$∴ স = ২০ ।$$

তৃতীয় পরিচ্ছেদ ।

একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ ।

১১৩। একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের সাধাবণ পূর্ণ আকার এই,
 $kx^2 + px + q = 0$. (১)

ইহাতে অব্যক্ত বাশি x এবং দ্বিতীয় শক্তি ও প্রথম শক্তি উভয়ই আছে, এবং ইহার ব্যক্ত বাশি k , p , ও q ধনবাশি বা ঋণবাশি, অথবা বাশি বা ঋণ বাশি, অথবা 0 হইতে পারে ।

এখন দেখা যাউক কিরূপে ইহার মান নির্ণয় করা যাইবে ।

সমনোদন দ্বারা (১) রূপে পাওয়া যায়,

$$kx^2 + px = -q$$

এবং এই সমীকরণকে 8 ক দিয়া গুণ করিয়া ও উভয় দিকে x^2 যোগ করিয়া,

$$8kx^2 + 8kpx + x^2 = x^2 - 8kq \quad (২)$$

এই সমীকরণ পাওয়া যায় ।

এই প্রক্রিয়ার বলে (২) এর বাম পক্ষ একটি সম্পূর্ণ বর্গ রাশি হইল ।

∴ (২) এর উভয় দিকে বর্গমূল লইলে,

$$2kx + p = \pm \sqrt{x^2 - 8kq}$$

বাম দিকে বর্গমূলে x চিহ্ন দেওয়া গেল, কারণ যে চিহ্নই লওয়া যাউক, উভয় দিকের বর্গ লইলে (২) সমীকরণই পাওয়া যাইবে ।

$$\therefore 2kx = -p \pm \sqrt{x^2 - 8kq}$$

$$\text{এবং} \therefore x = \frac{-p \pm \sqrt{x^2 - 8kq}}{2k}$$

এইরূপে (১) এর মান নির্ণয় প্রক্রিয়া ভাস্করাচার্যের বীজগণিতের ৫ম অধ্যায়ে প্রদর্শিত হইয়াছে, এবং এই প্রণালীই একটু পরিবর্তিতরূপে সচরাচর ইংরাজি বীজগণিত গ্রন্থে অবলম্বিত হয় ।

বথা—(১) কে ক দিয়া ভাগ করিলে

$$স^২ + \frac{খ}{ক}স + \frac{গ}{ক} = ০$$

$$\therefore স^২ + \frac{খ}{ক}স = -\frac{গ}{ক},$$

\therefore উভয় দিকে $\left(\frac{খ}{২ক}\right)^২$ যোগ দ্বারা

$$স^২ + \frac{খ}{ক}স + \frac{খ^২}{৪ক^২} = \frac{খ^২}{৪ক^২} - \frac{গ}{ক},$$

$$\therefore \left(স + \frac{খ}{২ক}\right)^২ = \frac{খ^২ - ৪কগ}{৪ক^২}$$

$$\therefore স + \frac{খ}{২ক} = \pm \frac{\sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

$$\therefore স = \frac{-খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

(১) উদাহরণ। $৩স^২ + ৪স - ২০ = ০$ ।

$$\begin{aligned} \text{এ স্থলে } স &= \frac{-৪ \pm \sqrt{১৬ + ২৪০}}{৬} \\ &= \frac{-৪ \pm ১৬}{৬} = ২ \text{ বা } -\frac{১০}{৩}। \end{aligned}$$

(২) উদাহরণ। $২স + \frac{৩}{স} - ৭ = ০$ ।

$$\text{এ স্থলে, } ২স^২ + ৩ - ৭স = ০,$$

$$\text{অর্থাৎ } ২স^২ - ৭স + ৩ = ০।$$

$$\begin{aligned} \therefore স &= \frac{৭ \pm \sqrt{৪৯ - ২৪}}{৪} \\ &= \frac{৭ \pm ৫}{৪} = ৩ \text{ বা } \frac{১}{২} \end{aligned}$$

১১৪। দ্বিগুণিত সমীকরণের দুইটি ও কেবল দুইটি মাত্র মান থাকে মনে কর, $কস^২ + খস + গ = ০$ ।

সমীকরণের আকার এই।

ইহার যে দুইটি মান আছে তাহা ১১৩ ধারায় দেখা গিয়াছে।

এখন মনে কব ইহার ম, য, র, এই তিনটি মান আছে। তাহা হইলে

স এর স্থানে ক্রমশঃ ম, য, র সংস্থাপন দ্বারা,

$$কম^২ + খম + গ = ০ \quad (১)$$

$$কয^২ + খয + গ = ০ \quad (২)$$

$$কর^২ + খর + গ = ০ \quad (৩)$$

∴ (১) হইতে (২) বাদ দিলে

$$ক(ম^২ - য^২) + খ(ম - য) = ০,$$

∴ (ম-য) দিয়া ভাগ করিলে

$$ক(ম+য) = ০ \quad (৪)$$

ঐক্যে (১) হইতে (৩) বাদ দিলে ও (ম-য) দিয়া ভাগ করিলে

$$ক(ম-র) = ০ \quad (৫)$$

এখন (৪) হইতে (৫) বাদ দিলে

$$ক(র+য) = ০ \quad (৬)$$

অতএব যখন $ক = ০$ নহে,

অবশ্যই তখন $র - য = ০$, অর্থাৎ $র = য$ ।

সুতরাং য হইতে র ভিন্ন নহে,

অর্থাৎ $কস^২ + খস + গ = ০$ এই সমীকরণের

ম ও য ভিন্ন আর কোন মান নাই।

১১৫। মনে কর

$$ম = \frac{-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}, য = \frac{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

তাহা হইলে

$$ম + য = \frac{-খ}{ক}, ম য = \frac{খ^২ - (খ^২ - ৪কগ)}{৪ক^২} = \frac{গ}{ক}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } k(s - m)(s - v) &= k \{s^2 - (m + v)s + mv\} \cdot \\ &= k \left(s^2 + \frac{v}{k}s + \frac{g}{k} \right) \end{aligned}$$

অতএব যদি $m \geq v$

$$s^2 + \frac{v}{k}s + \frac{g}{k} = 0$$

এই সমীকরণের মান হয়, তবে দেখা যাইতেছে,

মানদ্বয়ের যোগকণ = সমাকরণের দ্বিতীয় পদের বিপরীত চিহ্নিত পদ্ধতি,

এবং মানদ্বয়ের গুণফল = সমীকরণের তৃতীয় পদ।

আবার দেখা যাইতেছে, $ks^2 + vs + g$ এইরূপ ত্রিপদের উৎপাদক বিশ্লেষের $ks = k(s - m)(s - v)$,

যদি $m \geq v$

$$s^2 + \frac{v}{k}s + \frac{g}{k} = 0 \text{ এত সমীকরণের মান হয়।}$$

১১৬। যদি $m \geq v$,

$$ks^2 + vs + g = 0,$$

এই সমীকরণের মানদ্বয় হয়,

তাহা হইলে,

$$m = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 8kg}}{2k},$$

$$v = \frac{-v - \sqrt{v^2 - 8kg}}{2k}.$$

অতএব $m = v$, যদি $(v^2 - 8kg) = 0$,

$$\text{অর্থাৎ } v^2 = 8kg,$$

m ও v রূপবান্ধি, যদি $v^2 - 8kg = \text{কোন বর্গ বাশি}$,

(m ও v প্রকৃত বাশি, যদি $v^2 > 8kg$,

m ও v ভাবনিক বাশি যদি $v^2 < 8kg$ ।

$$১১৭। \text{ যদি } কস^২ + খস + গ = ০$$

(১)

এই সমীকরণে, $ক = ০$ তাহা হইলে

$$স = \frac{০}{০}, খ = \frac{-১}{০}।$$

পূর্বে দেখা গিয়াছে (১০১ ও ১০২ ধারা দ্রষ্টব্য)

যদি কোন রাশি $= \frac{০}{০}$ হয়, তবে সেই রাশির পরিমাণ অনির্দিষ্ট, এবংযদি কোন রাশি $= \frac{\text{কোন রাশি}}{০}$ তবে তাহার পরিমাণ অসম্ভব। দেখা যাউকবর্তমান ক্ষেত্রে $স = \frac{০}{০}, খ = \frac{-১}{০}$ ইহাদের অর্থ কি

$$\begin{aligned} স &= \frac{-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক} \\ &= \frac{(-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ}) (-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}{২ক (-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})} \\ &= \frac{খ^২ - খ^২ - ৪কগ}{২ক (-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})} \\ &= \frac{৪কগ}{২ক (-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})} \\ &= \frac{২গ}{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}} = -\frac{গ}{খ}, \text{ যদি } ক = ০ \end{aligned}$$

এবং (১) এতে $ক = ০$ লিখিলে

$$খস + গ = ০, \text{ অর্থাৎ } খস = -গ, \quad স = -\frac{গ}{খ}।$$

সুতরাং $ক = ০$ হলে (১) এর একটি মান $স = \frac{০}{০} = -\frac{গ}{খ}।$

$$\begin{aligned} আবার স &= \frac{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক} \\ &= \frac{(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}) (খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}{২ক (খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})} \\ &= \frac{-২গ}{খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}। \end{aligned}$$

এবং এই শেষোক্ত রাশিতে ক বতই ছোট হইবে, ইহার হ্র ততই ছোট হইবে, সুতরাং এই ভগ্নাংশের মূল্য ততই বড় হইবে। সুতরাং (১) এতে ক বত ছোট হইবে তাহার একটি মান ততই বড় হইবে, ইহাই $\mathbf{y} = \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

ইহার অর্থ। কারণ (১) এতে ক যদি ঠিক ০ হয়, তবে $\mathbf{ax} + \mathbf{b} = ০$, সমীকরণটি এই আকার ধারণ করিবে, এবং তাহা আর দ্বিশক্তি সমীকরণ থাকিবে না, সুতরাং তাহার কেবল একটি মাত্র মান থাকিবে ও তাহা $-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, অপর কোন মান থাকিবে না।

১১৮। যদি $\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g} = ০$ এই বাশিকে $\mathbf{s} - \mathbf{h}$ দিয়া ভাগ করা যায়, তাহা হইলে দেখা যাইবে ভাগশেষ $= \mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g}$ । এবং যদি $\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g} = ০$ হয়, তবে আর ভাগশেষ থাকে না। অতএব হ যদি $\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g} = ০$ এই সমীকরণের একটি মান হয়, তাহা হইলে $\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g}$ এই বাশি $\mathbf{s} - \mathbf{h}$ দিয়া ভাজ্য।

১১৯। কতকগুলি সমীকরণ এমন আছে যে তাহার দ্বিশক্তি সমীকরণ অপেক্ষা উচ্চতরশক্তি সমীকরণ হইলেও দ্বিশক্তি সমীকরণ সমাধানের প্রণালী অবলম্বনে তাহাদের মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। সেক্ষেপ সমীকরণ নানাবিধ, এবং তাহাদের সমাধানার্থে নানাবিধ কৌশল প্রয়োগ করা যাইতে পারে। সে সকল কৌশল অভ্যাস দ্বারা শিক্ষা করা যায়। এখানে তাহার মধ্যে কেবল কএকটি প্রকাষ সমীকরণ সমাধানের সঙ্ক্ষেত প্রদর্শিত হইবে।

১ম প্রকার।

$$\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g} = ০ \quad (১)$$

মনে কর $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, তাহা হইলে

$$\mathbf{kx^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{g} = ০,$$

$$\therefore \mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b^2} - ৪\mathbf{kg}}}{২\mathbf{k}} = \mathbf{s}.$$

$$\therefore \mathbf{s} = \left(\frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b^2} - ৪\mathbf{kg}}}{২\mathbf{k}} \right)^{\frac{১}{n}}.$$

(১) উদাহরণ। $২স^২ - ৩স - ১০ = ০$ ।

$$স = \frac{৩ \pm \sqrt{৯ + ৮০}}{৪} = \frac{৩ \pm ১১}{৪}$$

$$= ৪ বা - ১।$$

$$স = \pm ২ বা \pm \sqrt{-১}$$

২ উদাহরণ। $স + ৪\sqrt{স - ১১} = ১$ ।

$$\sqrt{স} = \frac{-৪ \pm \sqrt{১৬ + ৮৪}}{২} = -\frac{৪ \pm ১০}{২}$$

$$= ৩ বা - ৭$$

$$স = ৯ বা ৪৯।$$

২য় প্রকার।

$$৫(কস^{২ন} + খস^{২ন} + গ)^{২প} + ৬(কস^{২ন} + খস^{২ন} + গ)^{প} + জ = ০।$$

মনে কর $কস^{২ন} + খস^{২ন} + গ = য$,

$$৫য^{২প} + ৬য^{প} + জ = ০।$$

ইহা প্রথম প্রকারের সমীকরণ। এবং ইহা হইতে যএব মান নদীও হইলে মনে কব সেই মান য। তাহা হইলে

$$য = কস^{২ন} + খস^{২ন} + গ = য$$

$$\text{অর্থাৎ } কস^{২ন} + খস^{২ন} + গ - য = ০।$$

ইহাও একটি প্রথম প্রকারের সমীকরণ, এবং ইহাও মান পূর্বাগ্রহণিত প্রণালীতে নির্ণীত হইতে পারিবে।

(১) উদাহরণ।

$$স(স+১) + ৩\sqrt{২স^২ + ৮স + ৫} = ২১২ - স + ১।$$

ইহা ২য় প্রকারের উদাহরণ, তবে ইহাতে অগ্রে একটু কৌশল প্রয়োগ প্রয়োজন।

সরল আকারে আনিলে সমীকরণটি এষ্টরূপ হইবে,

$$s^2 + 3s - 24 + 6\sqrt{s^2 + 3s + 4} = 0,$$

$$\therefore 2s^2 + 6s - 48 + 6\sqrt{2s^2 + 6s + 8} = 0,$$

$$\therefore (2s^2 + 6s + 8) + 6\sqrt{2s^2 + 6s + 8} - 48 = 0।$$

$$\text{মনে কব } \sqrt{2s^2 + 6s + 8} = x,$$

$$\therefore x^2 + 6x - 48 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 224}}{2} = \frac{-6 \pm 16}{2}$$

$$= 4 \text{ বা } -12।$$

$$\therefore 2s^2 + 6s + 8 = 24 \text{ বা } 12।$$

$$2s^2 + 6s - 20 = 0 \text{ (কেবল প্রথম মান লইলে)}$$

$$\text{এবং } s = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 160}}{4}$$

$$= \frac{-6 \pm 14}{4} = 2 \text{ বা } -4।$$

৩য় প্রকার।

অচলান্তক সমীকরণ, অর্থাৎ বাহাতে সএব স্থানে $\frac{1}{s}$ লিখিলে

আকারে কোন পরিবর্তন হয় না। যথা—

$$(১) ks^2 + xs + k = 0$$

$$k(s^2 + 1) + xs(s + 1) = 0,$$

$$k(s + 1) \{s^2 - s + 1 + x\} = 0।$$

$$\therefore s + 1 = 0$$

$$\text{অথবা } s^2 + (x - 1)s + 1 = 0।$$

ইহাব প্রথমটি সর্বল সমীকরণ ও দ্বিতীয়টি বিশিষ্ট সমীকরণ, একই ইহাযেব মাননির্ণয়ের নিয়ম পূর্বেই প্রদর্শিত হইয়াছে।

$$(২) \text{ কস}^৩ + \text{খস}^৩ + \text{গস}^২ + \text{ঘস} + \text{ক} = ০ ।$$

∴ স^২ দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\text{ক}(স^২ + \frac{১}{স^২}) + \text{খ.স} + \frac{১}{স} + \text{গ} = ০ ।$$

$$\text{মনে কর } স + \frac{১}{স} = \text{ঘ}, \text{ তাহা হইলে } স^২ + \frac{১}{স^২} = \text{ঘ}^২ - ২,$$

$$\text{এবং } \text{ক}(\text{ঘ}^২ - ২) + \text{খঘ} + \text{গ} = ০ ।$$

এই শেবোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে ব জানা যাইবে ।

$$\text{মনে কর } \text{ঘ} = \text{স} । \text{ তাহা হইলে } \text{ঘ} = স + \frac{১}{স} = \text{ঘ},$$

∴ স^২ - স + ১ = ০, এটি দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে স জানা যাইবে ।

$$(৩) \text{ কস}^৩ + \text{খস}^৩ - \text{ঘস} - \text{ক} = ০ ।$$

$$\therefore \text{ ক}(স^৩ - ১) + \text{খস}(স^২ - ১) = ০,$$

$$\therefore (স^২ - ১) \{ \text{ক}(স + ১) + \text{খস} \} = ০ ।$$

$$\therefore স^২ - ১ = ০,$$

$$\text{অথবা } \text{ক}(স^২ + ১) + \text{খস} = ০ ।$$

এবং এই দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে স নির্ণীত হইবে ।

$$(৪) \text{ কস}^৩ + \text{খস}^৩ + \text{গস}^৩ + \text{গস}^২ + \text{ঘস} + \text{ক} = ০ ।$$

$$\therefore \text{ ক}(স^৩ + ১) + \text{খস}(স^৩ + ১) + \text{গস}^২(স + ১) = ০,$$

$$\therefore (স + ১) \{ \text{ক}(স^৩ - স^৩ + স^২ - স + ১) + \text{খস}(স^২ - স + ১) + \text{গস}^২ \} = ০,$$

$$\therefore স + ১ = ০,$$

$$\text{অথবা } \text{ক}(স^৩ - স^৩ + স^২ - স + ১) + \text{খস}(স^২ - স + ১) + \text{গস}^২ = ০,$$

$$\text{অর্থাৎ } \text{কস}^৩ + (\text{খ} - \text{ক})স^৩ + (\text{ক} - \text{খ} + \text{গ})স^২ + (\text{খ} - \text{ক})স + \text{ক} = ০ ।$$

ইহার প্রথমটি সরল সমীকরণ, ও দ্বিতীয়টি এই ওয় প্রকাবেব উপরের (২) উদাহরণের তুল্য । এবং উভয় সমীকরণেরই মান নির্ণয়ের প্রণালী পূর্বে প্রদর্শিত হইয়াছে ।

এই ৩য় প্রকারের একটি সাংখ্য প্রকৃতিবিশিষ্ট উদাহরণ দেওয়া
বাইতেছে।

উদাহরণ। $৪স^৩ - ১৬স^২ + ২৩স^২ - ৬স + ৪ = ০$

$$৪\left(স^২ + \frac{১}{স}\right) - ১৬\left(স + \frac{১}{স}\right) + ২৩ = ০$$

$$৪\left(স + \frac{১}{স}\right)^২ - ১৬\left(স + \frac{১}{স}\right) + ১৫ = ০$$

$$স + \frac{১}{স} = \frac{১৬ \pm \sqrt{২৫৬ - ১৪০}}{৮} = \frac{১৬ \pm ৪}{৮}$$

$$= \frac{৫}{২} \text{ বা } \frac{৩}{২}।$$

$$স^২ - \frac{৫}{২}স + ১ = ০$$

$$স^২ - ৫স + ২ = ০$$

$$স = \frac{৫ \pm \sqrt{২৫ - ১৬}}{৪} = \frac{৫ \pm ৩}{৪} = ২ \text{ বা } \frac{১}{২}।$$

অথবা $স^২ - ৩স +$

$$স^২ - ৩স + ১ = ০$$

$$স = \frac{৩ \pm \sqrt{৯ - ১৬}}{৪} = \frac{৩ \pm \sqrt{-৭}}{৪}।$$

দ্বিতীয় প্রকার।

$$(স+ক)^২ + (স+খ)^২ = গ।$$

মনে কব $স+ক = ব+ঘ$ $স+খ = ব-ঘ$,

$$\text{অর্থাৎ } ব = স + \frac{ক+খ}{২} \text{ ও } ঘ = \frac{ক-খ}{২}।$$

তাহা হইলে $(ব+ঘ)^২ + (ব-ঘ)^২ = গ$

$$\text{অর্থাৎ } ব^২ + ৬ব^২ঘ^২ + ঘ^২ = \frac{গ}{২}।$$

এই শেযোক্ত সমীকরণ হইতে x^2 এর মান নির্ণয় করা যাইবে, এবং তাহা হইতে s এর মান নির্ণীত হইবে ।

৩ম প্রকার ।

$$\sqrt{ks^2 + xs + g} + \sqrt{ks^2 - xs + g} = \phi \quad (১)$$

$$\text{কিন্তু, } (ks^2 + xs + g) - (ks^2 - xs + g) = 2xs \quad \cdot \quad (২)$$

(১) কে (২) দ্বারা ভাগ করিলে

$$\sqrt{ks^2 + xs + g} - \sqrt{ks^2 - xs + g} = \frac{2xs}{\phi} \quad (৩)$$

∴ (১) ও (৩) যোগ করিলে

$$\sqrt{ks^2 + xs + g} = \frac{\phi^2 + 2xs}{2\phi} \quad (৪)$$

(৪) এর বর্গ লইলে

$$ks^2 + xs + g = \left(\frac{\phi^2 + 2xs}{2\phi} \right)^2 \quad (৫)$$

(৫) একটিদ্বিঘাত সমীকরণ, এবং (৫) হইতে s নির্ণীত হইবে ।

৬ষ্ঠ প্রকার ।

$$(s+k)(s+x)(s+g)(s+\phi) = \psi$$

যদি $k+g = x+\phi = \delta$ হয় ।

এই সমীকরণের মান নিম্নলিখিত প্রণালীতে নির্ণয় করা যাইতে পারে
একতম সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইতেছে

$$(s+k)(s+g)(s+x)(s+\phi) = \psi$$

$$\therefore \{s^2 + (x+g)s + k\phi\} \{s^2 + (x+\phi)s + k\phi\} = \psi,$$

$$\therefore \{s^2 + \delta s + k\phi\} \{s^2 + \delta s + \phi\} = \psi,$$

$$\therefore (s^2 + \delta s)^2 + (\phi + k\phi)\delta s + k\phi^2 - \psi = 0$$

যদি $s^2 + \delta s = y$, তাহা হইলে

$$y^2 + (\phi + k\phi)y + k\phi^2 - \psi = 0$$

এই শেযোক্ত সমীকরণ হইতে y এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে,
এবং তাহা হইতেই s এর মান জানা যাইবে ।

১২০। অনেক স্থলে উৎপাদক বিশ্লেষ দ্বারা সমীকরণের মান নিরূপণ সহজ হয়। তাহার তিনটি উদাহরণ এখানে দেওয়া যাইতেছে।

(১) উদাহরণ। $নস^৩ + স + ন + ১ = ০।$

অতএব, $ন(স^৩ + ১) + স + ১ = ০,$

∴ $(স + ১){ন(স^২ - স + ১) + ১} = ০,$

∴ $স + ১ = ০ \quad (১)$

অথবা $নস^২ - নস + (ন + ১) = ০ \quad (২)$

(১) হইতে $স = -১,$

(২) হইতে $স = \frac{ন \pm \sqrt{০^২ - ৪ন^২ - ৪ন}}{২ন}$
 $= \frac{ন \pm \sqrt{-৪ন^২ - ৪ন}}{২ন}।$

(২) উদাহরণ। $(স - ২)(স - ৩)(স - ৪) = ১ \cdot ২ \cdot ৩।$

অতএব, $(স - ২)(স - ৩)(স - ৪) - ১ \cdot ২ \cdot ৩ = ০ \quad (১)$

এ স্থলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে $স = ৫$ একটি মান, অতএব (১) এর বাম পক্ষ $(স - ৫)$ দিয়া বিভাজ্য।

অর্থাৎ $স^৩ - ৯স^২ + ২৬স - ৩০ = ০$

উহার বাম পক্ষ $স - ৫$ দিয়া বিভাজ্য।

ভাগ করিয়া দেখা যাইতেছে (১) এই আকার ধারণ করে

যথা, $(স - ৫)(স^২ - ৪স + ৬) = ০$

∴ $স - ৫ = ০ \quad (২)$

অথবা $স^২ - ৪স + ৬ = ০ \quad (৩)$

(২) হইতে $স = ৫$, তাহা পূর্বেই জানা গিয়াছে।

(৩) হইতে $স = \frac{৪ \pm \sqrt{১৬ - ২৪}}{২} = \frac{৪ \pm ২\sqrt{-২}}{২}$
 $= ২ \pm \sqrt{-২}।$

(৩) উদাহরণ।

$$৮স^৩ + ১৬স = ২।$$

$$\text{অতএব } \{ (২স)^৩ - ১ \} + ৮(২স - ১) = ০।$$

$$\therefore (২স - ১) \{ (৪স^২ + ২স + ১) + ৮ \} = ০।$$

$$\therefore ২স - ১ = ০, \quad (১)$$

$$\text{অথবা } ৪স^২ + ২স + ৯ = ০ \quad (২)$$

$$(১) \text{ হইতে } স = \frac{১}{২}, (২) \text{ হইতে } স = \frac{-২ \pm \sqrt{৪ - ১৪৪}}{৪}$$

$$= \frac{-২ \pm \sqrt{-১৪০}}{৪}$$

১২১। এক্ষণে দ্বিশক্তি সমীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা জটিল প্রশ্ন সমাধানের কএকটি উদাহরণ দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। কোন পরিবার ভুক্ত লোক সংখ্যার বর্গ ২০ অপেক্ষা ঠিক সেই সংখ্যা পরিমাণে কম। সে সংখ্যাটি কত ?

মনে কর ইষ্ট সংখ্যা = স।

তাহা হইলে প্রদত্তানুসারে,

$$২০ - স^২ = স, \quad (১)$$

$$\therefore স^২ + স - ২০ = ০,$$

$$\therefore স = \frac{-১ \pm \sqrt{১ + ১৬০}}{২} = \frac{-১ \pm ১২}{২}$$

$$= ৯ \text{ বা } - ১০।$$

ইহার মধ্যে ৯ই প্রশ্নের প্রকৃত উত্তর।

দ্বিতীয় মান ঋণরাশি এবং তাহা প্রশ্নের উত্তর হইতে পারে না।

এরূপ অনেক স্থলে ঘটে, প্রস্তাবিত প্রদত্তানুসারে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহার একাধিক মান থাকিলে সকল মান মূল প্রশ্নের উত্তর হয় না। তাহার কারণ এই যে, প্রশ্ন প্রচলিত ভাষায় রচিত, কিন্তু তদনুসারে লিখিত সমীকরণ বীজগণিতে রচিত ভাষায় রচিত, এবং শেষোক্ত ভাষা প্রথমোক্ত ভাষা অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক।

উপরে সমীকরণ (১) এর ভাষা প্রেন্নেব ভাষা অপেক্ষা অধিক ব্যাপক।
প্রেন্নে লোকসংখ্যা কেবল ধনরাশি হইতে পারে, কিন্তু (১) এতে স ধনরাশি বা
ঋণরাশি হইতে পারে, তবে স ঋণরাশি হইলে s^2 , ২০ অপেক্ষা স পরিমাণ
কম না হইয়া স পরিমাণ বেশি হইবে। এবং তাহা হইলে উপরের প্রেন্নের
ভাষারও একটু পরিবর্তন আবশ্যক হইবে, যথা, “কোন পরিবারভুক্ত লোক-
সংখ্যার বর্গ ২০ অপেক্ষা ঠিক সেই সংখ্যা পরিমাণ বেশি। সে সংখ্যাটি কত?”

মনে করি ইহা সংখ্যা = s ।

তাহা হইলে এবার প্রেন্নাহুসারে

$$s^2 - 20 = s$$

$$\therefore s^2 - s - 20 = 0,$$

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$= 10 \text{ বা } -2$$

এবাব ১০ ধনরাশি এবং প্রেন্নেব প্রকৃত উত্তর, আর—২ ঋণরাশি এবং
এই পরিবর্তিত প্রেন্নের উত্তর নহে।

(২) উদাহরণ। কোন সংখ্যা তাহার বর্গের সহিত একত্র করিলে
২০ হয়। সংখ্যাটি কত?

মনে করি ইহা সংখ্যা = s ।

তাহা হইলে প্রেন্নাহুসারে,

$$s^2 + s = 20।$$

$$\therefore s^2 + s - 20 = 0,$$

$$\therefore s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$= 2 \text{ বা } -10।$$

এ স্থলে ২ ও -১০ উভয় সংখ্যাই প্রেন্নের উত্তর। এবং তাহার কারণ
এই যে এই প্রেন্নের ভাষা বীজগণিতের ভাষার ভ্রান্ত ব্যাপক।

১ (১) উদাহরণ। এমন দুইটি ভাগে ১০ কে ভাগ কর যে তাহাদের গুণফল ২৪ হইবে।

মনে কর একটি ভাগ - স,

তাহা হইলে অপর ভাগ = ১০ - স,

$$\text{এবং } স \times (১০ - স) = ২৪।$$

$$\therefore স^2 - ১০ স + ২৪ = ০,$$

$$\therefore স = \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ৯৬}}{২}$$

৬ বা ৪।

এ স্থলে ৬ ও ৪ উভয়ই প্রশ্নের উত্তর।

যদি এই প্রশ্নে “গুণফল ২৫ হইবে” বলা হইত, তাহা হইলে

$$স = \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ১০০}}{২} = ৫।$$

এবং যদি “গুণফল ২৬ হইবে” বলা বলা হইত, তাহা হইলে

$$\begin{aligned} স &= \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ১০৪}}{২} \\ &= \frac{১০ \pm \sqrt{-৪}}{২}, \end{aligned}$$

অর্থাৎ সে কোন প্রকৃত রাশি নহে তাহা ভাবনিক রাশি।

এবং ইহার কারণ এই যে ১০ কে এমন কোন দুই ভাগে ভাগ করা যায় না যে তাহার গুণফল $২\frac{১}{২} \times ২\frac{১}{২}$ অর্থাৎ ২৫ অপেক্ষা অধিক হইতে পারে।

ইহার কারণ নিয়ে প্রশ্নীত হইতেছে।

যে কোন বাশি ককে

$$\therefore \text{সমান দুই ভাগে ভাগ করিলে ভাগফল} = \frac{ক}{২} \text{ ও } \frac{ক}{২},$$

অসমান (মনে কর) = স ও ক - স।

$$\text{সমান ভাগবয়ের গুণফল} = \frac{k^2}{8},$$

$$\text{অসমান} = s \times (k-s)।$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } \frac{k^2}{8} - s(k-s) &= \frac{k^2}{8} - 2 \frac{k}{2} s + s^2 \\ &= \left(\frac{k}{2} - s \right)^2। \end{aligned}$$

কিন্তু $\left(\frac{k}{2} - s \right)^2$ যখন $\left(\frac{k}{2} - s \right)$ এর দ্বিতীয় শক্তি তখন তাহা অবশ্যই ধনবাশি।

$$\therefore \frac{k^2}{8} > s(k-s), s \text{ বাহাই হউক।}$$

$$\text{কেবল যখন } s = \frac{k}{2},$$

$$\text{তখন } s(k-s) = \frac{k}{2} \times \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4},$$

$$\text{এবং তখন } \frac{k^2}{8} - s(k-s) = 0।$$

অতএব $s(k-s)$ কখনও $\frac{k^2}{8}$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

(৪) কোন ব্যক্তি ১২ মাইল বেড়াইয়া বেধিলেন যদি তিনি ঘণ্টায় আর এক মাইল বেশি চলিতেন তাহা হইলে বেড়ান এক ঘণ্টা কমে শেষ হইত। তিনি ঘণ্টায় কত মাইল চলিতেছিলেন?

মনে কর ভ্রমণকারী ঘণ্টায় s মাইল চলিয়াছিলেন।

তাহা হইলে ১২ মাইল যাইতে $\frac{12}{s}$ ঘণ্টা লাগিয়াছিল।

যদি ঘণ্টায় আর এক মাইল বেশি চলিতেন

তাহা হইলে ১২ মাইল যাইতে $\frac{12}{s+1}$ ঘণ্টা লাগিত।

এবং প্রমাণসারে

$$\frac{১২}{s} - ১ = \frac{১২}{s+১} ।$$

$$\therefore ১২(s+১) - s(s+১) = ১২s,$$

$$\therefore s^2 + s - ১২ = ০,$$

$$\therefore s = \frac{-১ \pm \sqrt{১+৪৮}}{২} = \frac{১ \pm ৭}{২} \\ = ৩ \text{ বা } -৪ ।$$

ইহার মধ্যে ওই প্রশ্নের উত্তর,

-৪ তাহার উত্তর নহে ।

তবে প্রশ্নটিতে যদি এইরূপ বলা হইত “ঘণ্টার এক মাইল কম চলিলে তাহার বেড়াইতে এক ঘণ্টা বেশি লাগিত”, তাহা হইলে সেই প্রমাণসারে

$$\frac{১২}{s} + ১ = \frac{১২}{s-১} \text{ হইত ।}$$

$$\therefore ১২(s-১) + s^2 - s = ১২s,$$

$$\therefore s^2 - s - ১২ = ০,$$

$$\therefore s = \frac{১ \pm \sqrt{১+৪৮}}{২} = \frac{১ \pm ৭}{২} = ৪ \text{ বা } -৩,$$

এবং এই প্রশ্নের প্রকৃত উত্তর ৪ হইত ।

চতুর্থ পল্লিচ্ছেদ।

একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ।

১২২। একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের মান নির্ণয়ের ভিন্ন ভিন্ন প্রণালী একাধিকবর্ণ সৰল সমীকরণের মাননির্ণয়ের ভিন্ন ভিন্ন প্রণালীরই মত, এবং প্রত্যেকেই মূল উদ্দেশ্য, যোগ বিযোগ গুণ বা বিভাগ দ্বারা, অপৰ অব্যক্ত বাশিগুলিকে অপনীত করিয়া একটি অব্যক্ত বাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণে উপনীত হওয়া। (১০৪ ও ১০৫ ধারা দ্রষ্টব্য)। সেই প্রণালী প্রয়োগের নিয়ম নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

১২৩। প্রথমে দ্বিবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের বিষয় আলোচিত হইবে।
এরূপ স্থলে দুইটি সমীকরণ থাকিবে।

প্রথম প্রণালী।

সমবর্ত্তী সমীকরণ দুইটির মধ্যে সুবিধা মত কোন একটি হইতে একটি অব্যক্ত রাশির মান অপৰ অব্যক্ত বাশিকে ব্যক্ত মনে কবিয়া নিরূপিত কর, এবং সেই মান সেই বাশির স্থলে অপৰ সমীকরণে সংস্থাপিত কর। তাহা হইলে এই শেষোক্ত বাশি অপনীত হইবে, ও একটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত বাশির মূল্য নির্ণীত হইবে।

(১) উদাহরণ।

$$স + স + ব = ২৭ \quad (১)$$

$$\frac{১}{স} + \frac{১}{ব} = \frac{১}{২} \quad (২)$$

এখানে (২) হইতে $\frac{১}{স} = \frac{১}{২} - \frac{১}{ব} = \frac{ব-২}{২ব}$ ।

$$\therefore s = \frac{2b}{b-2}, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\therefore (1) \text{ হইতে } \frac{2b^2}{b-2} + \frac{2b}{b-2} + b = 29,$$

$$\therefore 2b^2 + 2b + b^2 - 2b = 29b - 58,$$

$$\therefore 3b^2 - 29b + 58 = 0,$$

$$\therefore b^2 - 2b + 18 = 0.$$

$$\therefore b = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 72}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 6 \text{ বা } 3.$$

$$\text{এবং (3) হইতে } s = 3 \text{ বা } 6.$$

$$(2) \text{ উদাহরণ। } s + b = 100 \quad (1)$$

$$sb = 2800 \quad (2)$$

$$(1) \text{ হইতে } s = 100 - b,$$

$$(2) \text{ হইতে } b(100 - b) = 2800.$$

$$\therefore b^2 - 100b + 2800 = 0,$$

$$\therefore b = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 28000}}{2} \\ = \frac{100 \pm 20}{2} = 60 \text{ বা } 80.$$

$$\therefore s = 100 - 60 \text{ বা } 100 - 80 \\ = 40 \text{ বা } 20.$$

দ্বিতীয় প্রশ্নালী।

যদি সমবর্তী সমীকরণের সমস্বাত হয় এবং উভয়েরই কোন পদে অব্যক্ত রাশি বা তাহাদের গুণকল সমশক্তিসম্পন্ন হয়, তাহা হইলে মনে কর $s=U$ । এবং s এর স্থানে U সংস্থাপনপূর্বক একটি সমীকরণ অপরটি দ্বারা ভাগ করিলে b অপনীত হইয়া উ বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। তাহা হইতে U র মূল্য জানা যাইবে, এবং তাহা হইলে s ও b জানা যাইবে।

(১) উদাহরণ।

$$স^২ + ব^২ = ৬৫ \quad \dots (১)$$

$$সব = ২৮ \quad (২)$$

মনে কর স = উব, তাহা হইলে

$$(১) \text{ হইতে } উ^২ ব^২ + ব^২ = ৬৫ \quad \dots (৩)$$

$$(২) \text{ হইতে } উব^২ = ২৮ \quad \dots (৪)$$

(৩) কে (৪) দিয়া ভাগ করিলে

$$\frac{উ^২ + ১}{উ} = \frac{৬৫}{২৮},$$

$$\therefore ২৮ উ^২ - ৬৫ উ + ২৮ = ০,$$

$$\therefore উ = \frac{৬৫ \pm \sqrt{৪২২৫ - ৩১৩৬}}{৫৬}$$

$$= \frac{৬৫ \pm ৩৩}{৫৬} = \frac{২৮}{৫৬} \text{ বা } \frac{৩২}{৫৬}$$

$$= \frac{৭}{১৩} \text{ বা } \frac{৪}{১৩}।$$

$$\therefore (৪) \text{ হইতে } ব^২ = \frac{২৮}{উ} = ২৮ \times \frac{১৩}{৭} \text{ বা } ২৮ \times \frac{১৩}{৪}$$

$$= ১৬ \text{ বা } ৪২,$$

$$\therefore ব = ৪ \text{ বা } ৭,$$

$$\text{এবং } স = উব = \frac{৭}{১৩} \times ৪ \text{ বা } \frac{৪}{১৩} \times ৭$$

$$= \frac{২৮}{১৩} \text{ বা } \frac{৩২}{১৩}।$$

(২) উদাহরণ।

$$\frac{স + ব}{স - ব} + \frac{স - ব}{স + ব} = \frac{১০}{৩} \quad \dots (১)$$

$$স^২ + ব^২ = ৪৫ \quad \dots (২)$$

মনে কর স = উব।

$$\therefore (১) \text{ হইতে } \frac{উ + ১}{উ - ১} + \frac{উ - ১}{উ + ১} = \frac{১০}{৩} \quad \therefore (৩)$$

$$(২) \text{ হইতে } ব^২ (উ^২ + ১) = ৪৫ \quad \dots (৪)$$

$$(৩) \text{ হইতে } (উ+১)^২ + (উ-১)^২ = ২৫ (উ^২ - ১)$$

$$\therefore ২ (উ^২ + ১) = ২৫ (উ^২ - ১)$$

$$\therefore ৪ উ^২ = ১৬, \therefore উ = \pm ২।$$

$$\therefore (৪) \text{ হইতে } ব^২ = ৯ = ৩, \therefore ব = \pm ৩,$$

$$\text{এবং } : \quad স = \pm ৬।$$

তৃতীয় প্রশ্নালী ।

কোন কোন স্থলে $স = ম + ন$, $ব = ম - ন$ ধরিয়া লইলে সমীকরণদ্বয়ের মান নির্ণয় সহজ হয়।

$$(১) \text{ উদাহরণ। } স^২ + ব^২ = ক^২ \quad (১)$$

$$স + ব = খ \quad \dots (২)$$

যদি $স = ম + ন$, $ব = ম - ন$ হয়,

তবে (২) হইতে $ম + ন + ম - ন = খ$,

$$\therefore ২ম = খ$$

$$\therefore ম = \frac{খ}{২} \quad (৩)$$

$$(১) \text{ হইতে } (ম + ন)^২ + (ম - ন)^২ = ক^২,$$

$$\therefore ২ (ম^২ + ৬ম^২ন^২ + ন^২) = ক^২$$

$$\therefore (৩) \text{ হইতে } ন^২ + \frac{৩খ^২}{২} ন^২ + \frac{খ^২}{১৬} - \frac{ক^২}{২} = ০ \quad \dots (৪)$$

(৪) হইতে $ন^২$ এবং $ন$ নির্ণীত হইবে, এবং তাহা হইলেই $স$ ও $ব$ নির্ণীত হইবে।

১২৪। ত্রিঘণ বিশক্তি সমীকরণেব মান নির্ণয়েব প্রশ্নালী ত্রিঘণ সবল সমীকরণের সমাধানের প্রশ্নালীর মত (১০৯ ধারা দ্রষ্টব্য)। নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে সেই প্রশ্নালীপ্রয়োগ স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ।

$$৩স + ব - ৫খ = ০ \quad (১)$$

$$৭স - ৩ব - ৯খ = ০ \quad \dots (২)$$

$$স^২ + ২ব^২ + ৩খ^২ = ২৩ \quad \dots (৩)$$

$$(১) \text{ ও } (২) \text{ হইতে} \quad \begin{aligned} s &= ৩৭, \\ v &= ২৭। \end{aligned}$$

$$\therefore (৩) \text{ হইতে } ৩৭^2 + ২৭^2 + ৩৭^2 = ২৩,$$

$$\therefore \quad ২৩৭^2 = ২৩ \times ৪$$

$$\therefore \quad w = \pm ২।$$

$$\therefore \quad x = \pm ১,$$

$$\text{এবং} \quad y = \pm ৩।$$

$$(২) \text{ "উদাহরণ।} \quad s(w+x) = ১০০ \quad (১)$$

$$v(x+s) = ১৪৪ \quad (২)$$

$$w(s+v) = ১৫৪ \quad (৩)$$

$$\therefore \quad ২(sv + vx + ws) = ৩৯৮,$$

$$\therefore \quad sv + vx + ws = ১৯৯। \quad (৪)$$

$$(৪) \text{ হইতে } (৩) \quad \text{বাদ দিয়া } sv = ৪৫ \quad (৫)$$

$$(৪) \text{ হইতে } (২) \quad ws = ৫৫ \quad (৬)$$

$$(৪) \text{ হইতে } (১) \quad vx = ৯৯ \quad (৭)$$

$$\therefore (৫) \text{ ও } (৬) \text{ এর গুণফল } (৭) \text{ দিয়া ভাগ দ্বারা } s^2 = ২৫, \text{ ও } s = \pm ৫,$$

$$(৫) \text{ ও } (৭) \quad (৬) \quad v = ৮১, \text{ ও } v = \pm ৯,$$

$$(৬) \text{ ও } (৭) \quad (৫) \quad w = ১২১, \text{ ও } w = \pm ১১।$$

১২৫। এক্ষণে একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ সংক্রান্ত প্রক্রিয়া দ্বারা জটিল প্রশ্ন সমাধানের দুইটি উদাহরণ দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। একটি সমকোণী চতুর্ভুজের দৈর্ঘ্য ৩ হাত বাড়াইলে ও প্রস্থ ২ হাত কমাইলে ক্ষেত্রফল সমান থাকে, এবং দৈর্ঘ্য ৯ হাত বাড়াইলে ও প্রস্থ ৫ হাত কমাইলে তাহার ক্ষেত্রফলের এক চতুর্থাংশ কমিয়া যায়। তাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

মনে কর দৈর্ঘ্য s হাত, প্রস্থ x হাত ।

তাহা হইলে প্রমাণসারে

$$(s+3)(x-2)=s \quad (১)$$

$$(s+2)(x-4)=s-\frac{s}{8} \quad (২)$$

$$\therefore s-2s+3x-6=s,$$

$$\text{ও} \quad s-4s+2x-8=s-\frac{3s}{8} \quad (৩)$$

$$\therefore 3x-2s=6 \quad (৩)$$

$$\frac{s}{8}-4s+2x=8 \quad (৪)$$

$$(৩) \text{ হইতে} \quad x=\frac{2s+6}{3}$$

$$(৪) \text{ হইতে} \quad \frac{s}{8} \times \frac{2s+6}{3}-4s+2s+16=8$$

$$\therefore s^2+3s-32s+36s+128=256,$$

$$\therefore s^2+3s-120=0,$$

$$\therefore s = \frac{-3 \pm \sqrt{9+480}}{2} = \frac{-3 \pm 21}{2} \\ = 9 \text{ বা } -12।$$

ঋণরাশি এ প্রসেব উত্তর হইতে পারে না,

$$\therefore s = 9 \text{ হাত, ইহাই এ প্রশ্নের উত্তর।}$$

$$\text{এবং} \quad x = \frac{2s+6}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ হাত।}$$

(২) উদাহরণ। একটি ট্রেন k হইতে x অভিমুখে ও আর একটি x হইতে k অভিমুখে একই সময়ে যাত্রা করে, এবং ৪ ঘণ্টা পরে পথে পরস্পর মিলে। প্রথম ট্রেন x তে পৌছিবার ১ ঘণ্টা ৪৮ মিনিট পরে দ্বিতীয় ট্রেন k তে পৌছে। k ও x এর ব্যবধান ১৪৪ মাইল। কোন ট্রেন ঘণ্টায় কত মাইল বাইতেছিল নিরূপণ কর।

মনে কর ঘণ্টায় প্রথম ট্রেন স মাইল

দ্বিতীয় ট্রেন ব মাইল বাইতেছিল।

তাহা হইলে প্রাপ্তসূত্রে

$$৪(স + ব) = ১৪৪,$$

এবং $\frac{১৪৪}{ব} = \frac{১৪৪}{স} + ১ \frac{৪৮}{৬০}।$

অর্থাৎ $স + ব = ৩৬ \dots (১)$

$\frac{১৪৪}{ব} = \frac{১৪৪}{স} = \frac{৯}{৫} \dots (২)$

(১) হইতে $ব = ৩৬ - স,$

(২) হইতে $\frac{১৪৪}{৩৬-স} - \frac{১৪৪}{স} = \frac{৯}{৫},$

$\therefore \frac{১৬}{৩৬-স} - \frac{১৬}{স} = \frac{১}{৫},$

$\therefore ৮০স - (২৮৮০ - ৮০স) = ৩৬স - স^২,$

$\therefore স^২ + ১২৪স - ২৮৮০ = ০,$

$\therefore স = \frac{-১২৪ \pm \sqrt{১৫৩৭৬ + ১১৫২০}}{২}$
 $= \frac{-১২৪ \pm ১৬৪}{২} = \frac{৪০}{২} \text{ বা } -\frac{২৮৮}{২}$
 $= ২০ \text{ বা } -১৪৪।$

প্রাপ্তসূত্রে ঋণবাশি মান অগ্রাহ্য।

$\therefore স = ২০ \text{ মাইলই স এর প্রকৃত মূল্য।}$

$\therefore ব = ৩৬ - স = ১৬ \text{ মাইল।}$

৭। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর।—

$$(১) ২স + ১১ = ৭স - ১৪।$$

$$(২) ৪স + ৩ = ৮স - ২।$$

$$(৩) ৪(ফ + স) - পর = ৮(ফ + স) - পর।$$

$$(৪) স - ৫ - (৫ - স)(স + ১) = (স - ৫)(১ + স) + ৪(৫ - ১স)।$$

$$(৫) (স + ৫)(স - ৩) - (স + ৫)(স - ৩) + ৭ = ০।$$

২। (১) এক ব্যক্তি কিয়ৎদূর ঘণ্টায় ৩২ মাইল হিসাবে চলিয়া ঘণ্টায় ৭ মাইল হিসাবে তাহাব কিয়ৎদূর দৌড়িয়া ফিবিয়া আইসেন, এবং বাকি পথটুকু ৭ মিনিটে আইসেন। চলিতে ও ফিবিতে তাহাব মোট ৩৫ মিনিট লাগিয়াছিল। তিনি কতদূর দৌড়িয়াছিলেন?

(২) দুই ব্যক্তি একই সময়ে একই পথে ক হইতে খ তে যাত্রা করে। প্রথম ব্যক্তি অষ্টপৃষ্ঠে ঘণ্টায় ৭২ মাইল যায়, দ্বিতীয় ব্যক্তি ট্রেনে ঘণ্টায় ৩০ মাইল যায়। এবং প্রথম ব্যক্তি দ্বিতীয় ব্যক্তির ৩০ মিনিট পবে খ তে পহুছে। ক ও খএব ব্যবধান কত?

(৩) লগুন হইতে একটি ট্রেন অপবাহু একটা ৩০ মিনিটের সময় ছাড়িয়া অপরাহু ৬টাৰ সময় ব্রিষ্টলে পহুছে, এবং আব একটি ট্রেন অপবাহু ৩টাৰ সময় ব্রিষ্টল হইতে যাত্রা কবিয়া অপবাহু ৬টাৰ সময় লগুনে পহুছে। দ্বিতীয় ট্রেন প্রথম ট্রেনের সহিত কয়টার সময় একত্র হইয়াছিল?

(৪) কতকগুলি পদ্যেব তৃতীয়াংশ, চতুর্থাংশ, পঞ্চমাংশ ও ষষ্ঠাংশ শিব, বিষ্ণু, ভবানী ও হর্যেব পূজায় দিয়া, অবশিষ্ট ৬টি পদ্য গুরুপূজায় দেওয়া যায়। কতগুলি পদ্য ছিল?

(৫) দুটি সংখ্যার মধ্যে বড়টি ছোটটির দ্বিগুণ, এবং তাহাদের বোগকল ১৫। ছোট সংখ্যাটি কত?

৩। নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর।

$$(১) স + ৪ = ১৫, স - ৪ = ১১।$$

$$(২) ২স + ৪৪ = ১০২, ৩৪ স - ০০২৪ = ১।$$

$$(৩) \frac{স}{৪} + \frac{ষ}{৫} + ১ = \frac{স}{৫} + \frac{ষ}{৪} = ২৩।$$

$$(৪) ৫স + ১৬ষ = ১৪৬, ১১স + ৫ষ = ১১০।$$

$$(৫) ৩স + ২০ = ৪৪ - ১০, ৪(স - ১) = ৩(ষ - ৩)।$$

৪। (১) একটি ভগ্নাংশের লবে ২ বোগ কবিলে ভগ্নাংশের মূল্য হয় $\frac{১}{২}$, এবং হর হইতে ২ বাদ দিলে তাহাব মূল্য হয় $\frac{১}{৩}$ । ভগ্নাংশটি কি ?

(২) কোন একটি কার্য ক ও খ একত্রে ৪ দিনে শেষ কবিতে পারে। তাহাবা একত্রে ৩ দিন কার্য কবাব পব ক ছাড়িয়া যায় এবং খ তাহা আর ২ দিনে শেষ কবে। ক ও খ প্রত্যেকে একা কত দিনে তাহা শেষ করিত ?

(৩) একটি ট্রেন এক ঘণ্টা চলিবাব পব পথে একটা বিদ্রাট ঘটায় এক ঘণ্টা ধামিয়া পবে পূর্বে বেগেব তিন পঞ্চমাংশ বেগে চলে ও গন্তব্য স্থানে পহুছিতে তিন ঘণ্টা বিলম্ব হয়। যদি এ বিদ্রাট আৰ ২ ঘণ্টা পবে ঘটিত হ্তবে পহুছিতে ১ ঘণ্টা ২০ মিনিট বিলম্ব হইত। ট্রেনের পূর্বেবেগেব পবিমাণ, এবং যাত্রা কবিবাব স্থান হইতে গন্তব্য স্থানেব ব্যবধান কত ?

(৪) এক ব্যক্তিৰ বয়স তাহাব জ্যেষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব চতুগুণ ও কনিষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব পঞ্চগুণ। জ্যেষ্ঠ পুত্রেব বয়স যখন তাহাব বর্তমান বয়সের তিনগুণ হইবে, পিতাব বয়স তখন কনিষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব দ্বিগুণ অগেচ্ছ তিন বৎসব অধিক হইবে। পিতা ও পুত্রদ্বয়েব বর্তমান বয়সেব পবিমাণ নির্ণয় কব।

(৫) দুইটি সংখ্যাব যোগফল তাহাদেব বিয়োগফলেব তিনগুণ, এবং সেট বিয়োগফল হইতে ২ বাদ দিলে ১ বাকি থাকে। সংখ্যা দুইটি কি কি ?

৫। নিম্নেব সমীকবণগুলির মান নির্ণয় কব।

$$(১) স^২ - ৪৮স + ৫২৭ = ০।$$

$$(২) \frac{১}{স-২} - \frac{১}{স-১} = \frac{১}{৬}।$$

$$(৩) স^২ - (ক + খ)স + কখ = ০।$$

$$(৪) ৭৭(স^২ - ১) = ৭২স।$$

$$(৫) \frac{৩}{৫-স} + \frac{২}{৪-স} = \frac{৮}{স+২}।$$

৬। নিম্নের সমীকরণগুলির সমাধান কর ।

$$(১)^{\circ} ২(স^২ - ৩স + ১)^২ + ৫(স^২ - ৩স + ১) + ৩ = ০ ।$$

$$(২) \frac{স^২ - ক^২ - খ^২}{গ^২} - \frac{গ^২}{স^২ - ক^২ - গ^২} = ২ ।$$

$$(৩) স^২ + \sqrt{স^২ - ৫} = ১১ ।$$

$$(৪) স^৩ + ২কস^৩ = ২স + \frac{১}{ক^২} ।$$

$$(৫) \sqrt[৩]{ক} + স + \sqrt[৩]{ক - স} = \sqrt[৩]{খ}$$

৭। (১) এক দল অলিম সংখ্যাব অঙ্কের বর্গমূল ও সেই সংখ্যার নবম ভাগের অষ্টভাগ একটি মালতীকুঞ্জে গুলিতেছে এবং সেই দলের অবশিষ্ট দুইটিব একটি এক পদ্যের মধ্যে ও অপরটি সেই পদ্যের বাহিরে উড়িতেছে। তাহাদের মোট সংখ্যা কত ?

(২) কোন ব্যক্তি ৮৪ মাইল ভ্রমণ করিয়া দেখিলেন ঘণ্টার আর ৫ মাইল অধিক ভ্রমণ করিলে ৫ ঘণ্টা কমে ভ্রমণ শেষ হইত। তিনি ঘণ্টার কত মাইল ভ্রমণ করিয়াছিলেন ?

(৩) কোন একটি সংখ্যা ক কে এমনত দুই ভাগে ভাগ কর যে এক ভাগেব বর্গ অপব ভাগ ও সমস্ত সংখ্যাব গুণফলের সহিত সমান হয়।

(৪) কোন একটি সংখ্যা ও তাহার বর্গের সমষ্টিতে সেই সংখ্যার দ্বিগুণ যোগ করিলে যোগফল তাহার পাঁচগুণ অপেক্ষা তিন অধিক হয়। সংখ্যাটি কত ?

৮। (৫) দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফলে তাহাদের গুণফলের দ্বিগুণ যোগ করিলে যত হয় তাহা প্রথমোক্ত যোগফল হইতে সেই গুণফলের দ্বিগুণ বাদ দিলে বাহা বাকি থাকে তাহার পঁচিশগুণ। এবং তাহাদের বিবোগফল ২। সংখ্যা দুটি কি কি ?

৯। নিম্নের সমীকরণগুলির সমাধান কর ।

$$(১) স^২ + সখ = (ক - খ)^২,$$

$$সখ + খ^২ = ৪কখ ।$$

$$(২) \quad s^2 + s^2 = ১৬,$$

$$s^2 - s^2 = ১৬।$$

$$(৩) \quad s^2 + s^2 = ১২,$$

$$s^2 - s^2 = ২।$$

$$(৪) \quad ৩s^2 + ২s^2 = ৫০,$$

$$s^2 \rightarrow ৩s^2 = ১।$$

$$(৫) \quad s^2 + \frac{s}{s} = ১০,$$

$$s^2 - s = ৩৬।$$

৯। (১) ছটি সংখ্যার যোগফল ১৬, ও তাহাদের বর্গের যোগফল ১৩০।
সংখ্যা দুটি কি কি ?

(২) ছটি সংখ্যার গুণফল ৫৪, ও তাহাদের বিবোগফল ৩। সংখ্যা
দুটি কি কি ?

(৩) একটি সমকোণী চতুর্ভুজের দৈর্ঘ্য ২ হাত কমাইলে ও প্রস্থ ২
হাত বাড়াইলে তাহার ক্ষেত্রফল ১৬ বর্গহাত বাড়িবে। এবং তাহার দৈর্ঘ্য
ও প্রস্থ উভয়ের বর্গের যোগফল উভয়ের বিবোগফলের ৫০ গুণ। ঐ
চতুর্ভুজের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(৪) একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিধি ৩০ ইঞ্চি, ও ক্ষেত্রফল ৩০ বর্গ
ইঞ্চি। তাহার ভূজগুলি কত কত ?

(৫) একটি সমকোণী চতুর্ভুজের পরিধি ৬০ হাত ও ক্ষেত্রফল ২২১ বর্গ
হাত। তাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায় ।

অনুপাত, সমানুপাত, ও বিপরীতানুপাত ।

১২৬। দুইটি রাশি k ও x সমান হইতে পারে, অথবা, অসমান হইতে পারে। অসমান হইলে অবশ্যই একটি বড় ও অপবটি ছোট হইবে, এবং বড়টি ছোটটি অপেক্ষা কত বড় অর্থাৎ তাহাদের পার্থক্য কত তাহা বিবেচনা করিয়া বাবা জানা যায়।

যদি $k > x$,

তাহা হইলে k ও x 'র পার্থক্য $= k - x$ ।

কণ বাশির অন্তিম স্বীকার করিলে,

$k > x$ বা $k < x$ যাহাই হউক না কেন,

k ও x 'র পার্থক্য $= k - x$ ।

তবে $k > x$ হইলে $k - x$ ধনাত্মক,

ও $k < x$ হইলে $k - x$ ঋণাত্মক।

১২৭। সমানত্ব বা অসমানত্ব, বড় হওয়া বা ছোট হওয়া, ব্যতীত k ও x 'র আর এক প্রকার সম্বন্ধ আছে। k বাশি x বাশির কতগুণ বা কত ভাগ এভাবেও k ও x কে দেখা যাইতে পারে।

একটি বাশি অপব একটি বাশির কত গুণ বা কত ভাগ এই ভাবে তাহাদিগকে দেখিলে তাহাদের যে সম্বন্ধ, তাহাকে অনুপাত বলে।

বাশিদ্বয়কে অনুপাতের পদ বলে, এবং প্রথমটিকে অগ্রপদ বা পূর্বপদ ও দ্বিতীয়টিকে পশ্চাদপদ বা পশ্চপদ বলে।

দুইটি রাশির অনুপাত লিখিতে হইলে পদদ্বয়ের মধ্যে দুইটি বিন্দু অঙ্কিত করিতে হয়, যথা k ও x 'র অনুপাত $k : x$ এইরূপে লিখিত হয়। এবং অনুপাতের অর্থানুসারে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে,

এই অনুপাতের পরিমাণ $\frac{k}{x}$, অর্থাৎ $k : x = \frac{k}{x}$ ।

আব এই ভুক্ত ক ও খ'র অনুপাত $\frac{ক}{খ}$ এই আকারেও লিখিত হয় ।

১২৮। দুইটি বাশিৰ বর্গেব অনুপাতকে বাশিধয়েব দ্বিতীয়া অনুপাত বা দ্বিত্বাত বা দ্বিগুণ অনুপাত বলা যায় ।

যথা ক^২ : খ^২ ইহা ক ও খ'ব দ্বিতীয়াঅনুপাত ।

১২৯। পূৰ্ণপদ পরপদ অপেক্ষা বড় হইলে অনুপাতকে বৃহত্তর বিষমানুপাত, ও ছোট হইলে অনুপাতকে ক্ষুদ্রতর বিষমানুপাত বলে ।

১৩০। অনুপাতের উভয় পদে কোন এক বাশি যোগ কবিলে বৃহত্তর বিষমানুপাতের পবিমাণেব হ্রাস ও ক্ষুদ্রতর বিষমানুপাতের পরিমাণের বৃদ্ধি হয় । এবং উভয় পদ হইতে কোন একবাশি বিয়ুক্ত কবিলে ঠিক তাহাব বিপরীত ফল হয় ।

যদি $ক > খ$,

তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} < \frac{ক+স}{খ+স}$ এবং $> \frac{ক-স}{খ-স}$ ।

এবং যদি $ক < খ$,

তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} > \frac{ক+স}{খ+স}$ এবং $< \frac{ক-স}{খ-স}$ ।

কাবণ, $\frac{ক}{খ} = \frac{ক(খ+স)}{খ(খ+স)}$, $\frac{ক+স}{খ+স} = \frac{খ(ক+স)}{খ(খ+স)}$ ।

∴ $\frac{ক}{খ} > \frac{ক+স}{খ+স}$ বা $< \frac{ক+স}{খ+স}$,

যদি $\frac{ক(খ+স)}{খ(খ+স)} > \frac{খ(ক+স)}{খ(খ+স)}$ বা $< \frac{খ(ক+স)}{খ(খ+স)}$,

অর্থাৎ যদি $ক(খ+স) > খ(ক+স)$ বা $< খ(ক+স)$

অর্থাৎ যদি $কস > খস$ বা $< খস$,

অর্থাৎ যদি $ক > খ$ বা $< খ$ ।

$$\text{আবার } \frac{ক}{খ} = \frac{ক(খ - স)}{খ(খ - স)}, \frac{ক - স}{খ - স} = \frac{খ(ক - স)}{খ(খ - স)}।$$

$$\therefore \frac{ক}{খ} > \text{বা} < \frac{ক - স}{খ - স},$$

$$\text{যদি } \frac{ক(খ - স)}{খ(খ - স)} > \text{বা} < \frac{খ(ক - স)}{খ(খ - স)},$$

$$\text{অর্থাৎ যদি } ক(খ - স) > \text{বা} < খ(ক - স)$$

$$\text{অর্থাৎ যদি } খ স > \text{বা} < ক স,$$

$$\text{অর্থাৎ যদি } খ > \text{বা} < ক।$$

১৩১। দুটি অমুপাতের তুল্যতাকে সমানুপাত বলে, এবং যে চারিটি রাশি সেই সমান অমুপাতের পদ, তাহাদিগকে সমানুপাতী বলে।

সমানুপাত লিখিতে হইলে সমান অমুপাত দ্বয়ের মধ্যে চারিটি বিন্দু অঙ্কিত করিতে হয়।

$$\text{যথা, যদি } ক : খ = গ : ঘ,$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ},$$

তাহা হইলে ক খ - গ ঘ এইরূপে সেই সমানুপাত লিখিতে হয়।

১৩২। সমানুপাতের চতুর্ধ রাশিকে চতুর্ধ সমানুপাতী বলে।

$$\text{যথা, যদি } ক : খ :: গ : ঘ$$

তাহা হইলে ঘ কে ক, খ, গ'র চতুর্ধ সমানুপাতী বলে।

$$\text{এরূপ হলে } \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}।$$

$$\text{অর্থাৎ কঘ} = \text{খগ}।$$

$$\text{সুতরাং } ঘ = \frac{খ গ}{ক}।$$

এই সাম্যের উপরই পাটীগণিতের ত্রৈবাশিক প্রক্রিয়া নির্ভর করে।

যদি k, x, y এই তিনটি রাশিতে সমানুপাত সংগঠিত হয়,
অর্থাৎ যদি $k : x :: x : y$,
তাহা হইলে মধ্য রাশি x কে **অন্যানুপাতী**, ও তৃতীয় রাশি y কে
তৃতীয়ানুপাতী বলে।

এবং এক্ষণে হলে $\frac{k}{x} = \frac{x}{y}$,

অর্থাৎ $x^2 = ky$ ।

আর $\frac{k}{y} = \frac{k}{x} \times \frac{x}{y} = \frac{k}{x} \times \frac{k}{x}$
 $= \frac{k^2}{x^2}$ ।

১৩৩। যদি $\frac{k}{x} = \frac{y}{x}$,

তাহা হইলে—

(১) $\frac{k+x}{x} = \frac{y+x}{x}$,

কারণ, $\frac{k}{x} + 1 = \frac{y}{x} + 1$

অর্থাৎ $\frac{k+x}{x} = \frac{y+x}{x}$ ।

ইহাকে **সমোদগে** সমানুপাত বলে।

(২) $\frac{k-x}{x} = \frac{y-x}{x}$ ।

কারণ $\frac{k}{x} - 1 = \frac{y}{x} - 1$ ।

অর্থাৎ $\frac{k-x}{x} = \frac{y-x}{x}$ ।

ইহাকে **বিষমোদগে** সমানুপাত বলে।

$$(৩) \frac{খ}{ক} = \frac{ঘ}{গ}।$$

$$\text{কাবণ } ১ \div \frac{ক}{খ} = ১ - \frac{গ}{ঘ}$$

$$\text{অর্থাৎ } ১ \times \frac{খ}{ক} = ১ \times \frac{ঘ}{গ}।$$

ইহাকে বিপর্য্য প্রত্যয়ে সমান্তরূপত বলে।

$$(৪) \frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}।$$

$$\text{কাবণ, } কঘ = খগ,$$

$$\therefore কঘ - গঘ = খগ - গঘ,$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}।$$

ইহাকে একান্তর প্রত্যয়ে সমান্তরূপত বলে।

$$(৫) \frac{ক^n}{খ^n} = \frac{গ^n}{ঘ^n}।$$

$$\text{কাবণ, } \frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ} \quad \text{ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}$$

$$= \frac{গ}{ঘ} \times \frac{গ}{ঘ} \times \frac{গ}{ঘ}$$

$$\therefore \frac{ক^n}{খ^n} = \frac{গ^n}{ঘ^n}।$$

$$(৬) \frac{মক + নখ}{পক + ফখ} = \frac{মগ + নঘ}{পগ + ফঘ}।$$

$$\text{কামণ, } ১ \times \frac{ক}{খ} = ১ \times \frac{গ}{ঘ},$$

$$\therefore ম \times \frac{ক}{খ} + ন = ম \times \frac{গ}{ঘ} + ন,$$

$$\therefore \frac{মক + নখ}{খ} = \frac{মগ + নঘ}{ঘ}।$$

এবং ঐ কারণে, $\frac{পক+কখ}{খ} = \frac{পগ+কঘ}{ঘ}$ ।

∴ $\frac{মক+নখ}{খ} - \frac{পক+কখ}{খ} = \frac{মগ+নঘ}{ঘ} - \frac{পগ+কঘ}{ঘ}$,

∴ $\frac{মক+নখ}{পক+কখ} = \frac{মগ+নঘ}{পগ+কঘ}$ ।

১৩৪। যদি $\frac{ক}{খ} - \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ = ইত্যাদি,

এবং এই সমান অনুপাতগুলির সংখ্যা ন হয়,

তাহা হইলে $\left(\frac{পক^ম + কগ^ম + বঙ^ম + \dots}{পখ^ম + কঘ^ম + বচ^ম + \dots} \right)^ম = \left(\frac{কগঙ}{খঘচ} \right)^ম$
 $= \frac{ক}{খ}$ ।

মনে কব $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ = ইত্যাদি = য ।

তাহা হইলে $ক = খ য$, $গ = ঘ য$, $ঙ = চ য$, ইত্যাদি, (১)

এবং $পক^ম = পখ^ম য^ম$, $কগ^ম = কঘ^ম য^ম$, $বঙ^ম = বচ^ম য^ম$, ইত্যাদি ।

∴ $পক^ম + কগ^ম + বঙ^ম + \dots = (পখ^ম + কঘ^ম + বচ^ম + \dots) য^ম$ ।

∴ $\frac{পক^ম + কগ^ম + বঙ^ম + \dots}{পখ^ম + কঘ^ম + বচ^ম + \dots} = য^ম$,

∴ $\left(\frac{পক^ম + কগ^ম + বঙ^ম + \dots}{পখ^ম + কঘ^ম + বচ^ম + \dots} \right)^ম = য = \frac{ক}{খ}$ ।

আবার (১) এব ন সংখ্যক সমীকরণগুলির গুণফল লইলে

$কগঙ = (খঘচ)^ন$,

∴ $\frac{কগঙ}{খঘচ} = য^ন = \left(\frac{ক}{খ} \right)^ন$ ।

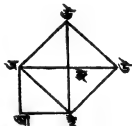
$$\therefore \left(\frac{\text{কগু}}{\text{খঘ}} - \right) \frac{2}{n} = \frac{2}{n} = \frac{\text{ক}}{\text{খ}} ।$$

১৩৫। উপরে ১২৭ দ্বারা বলা গিয়াছে,
পূর্বপদ, ক, পরপদ, খ'র কতগুণ বা কত ভাগ,
ক খ এই অনুপাত তাহাই প্রকাশ কবে, এবং

$$\text{ক খ} = \frac{\text{ক}}{\text{খ}} ।$$

কিন্তু অনেক স্থলে এরূপ ঘটে যে সেট 'কত গুণ' বা 'কত ভাগ' কোন
নির্দিষ্ট সসীম অখণ্ড বা খণ্ড সংখ্যা দ্বারা ঠিক প্রকাশ করা যায় না।

যথা, যদি অ আ ই ঈ একটি সমকোণী
সমবাহু চতুর্ভুজ হয়, এবং তাহাব কর্ণ
অ ই'র উপর আর একটি সমকোণী সমবাহু
চতুর্ভুজ অ ই উ উ অঙ্কিত করা যায়, তাহা
হইলে (পাটীগণিতের ১১৩ ও ১২০ ধারা
দ্রষ্টব্য)



$$\text{অ আ ই ঈ'র ক্ষেত্র ফল} = \text{অ আ}^2$$

$$\text{অ ই উ উ'র} = \text{অ ই}^2 ।$$

এবং জ্যামিতিতে সপ্রমাণ করা আছে, ও স্পষ্টই দেখা যাইতেছে,

$$\text{অ ই উ উ} = ২ \times \text{অ আ ই ঈ} ।$$

$$\therefore \text{অ ই}^2 = ২ \times \text{অ আ}^2,$$

$$\therefore \text{অ ই} = \sqrt{২} \times \text{অ আ} ।$$

$$\therefore \frac{\text{অ ই}}{\text{অ আ}} = \sqrt{২} ।$$

কিন্তু $\sqrt{২}$ কোন নির্দিষ্ট সসীম অখণ্ড বা খণ্ড রাশি নহে, তবে ২এর
বর্গমূল আকর্ষণ ক্রিয়া ক্রমশঃ চালাইলে লব্ধ বর্গমূলের দশমিক ভাগের ঘরের
সংখ্যা বৃদ্ধি হইতে থাকিবে, এবং লব্ধ বর্গমূল প্রকৃত বর্গমূলের সম্মিলিত হইতে
থাকিবে।

আবও দেখা যাইতেছে,

$$\frac{\text{অউ}}{\text{অই}} = \sqrt{২},$$

$$\therefore \frac{\text{অউ}}{\text{অই}} = \frac{\text{অই}}{\text{অআ}}।$$

শিক্ষার্থীর এই কথাগুলি মনে রাখা আবশ্যক।

১৩৬। যদি দুইটি বাশি একরূপে সম্বন্ধ থাকে যে, তাহাদের একটির পবিত্বজন ঘটলে অপরটির এ প্রকার পবিত্বজন ঘটে যে, তাহাদের পূর্ণ-পরিমাণদ্বয় ও পবিত্বজিতপরিমাণদ্বয় এই চারিটি সর্বদা সমানুপাতী থাকে, তাহা হইলে সেই বাশিদ্বয়কে **বিশপ্লিণামী** বলে।

যদি সেই সমানুপাত যথাক্রমে হয়, তবে বাশিদ্বয়কে **অথাক্রমে** বিপরিণামী বলে। যদি তাহা বিপরীতক্রমে হয়, তবে বাশিদ্বয়কে **বিশপ্লীতক্রমে** বিপরিণামী বলে।

যথা, যদি ক ও খ কোন দ্রব্যের পরিমাণ ও তাহার মূল্য হয়, এবং সেই দ্রব্য যদি একরূপ হয় যে তাহার পরিমাণ বাড়িলে বা কমিলে তাহার মূল্য সেই অনুপাতে বাড়ে বা কমে, তাহা হইলে ক ও খ যথাক্রমে বিপরিণামী। এবং ক, ও খ, যদি ক ও খ'র একসঙ্গে পবিত্বজিত পরিমাণ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ} = \frac{ক'}{খ'}।$$

আবার যদি ক ও খ কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে অপব একটি নির্দিষ্ট স্থানে যাইতে, সমান গতিশীল যানেব যাইবার বেগের ও যাইবার সময়ের পরিমাণ হয়, এবং ক, ও খ, তাহাদের একসঙ্গে পবিত্বজিত পরিমাণ হয়, তাহা হইলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, ক ও খ বিপরীতক্রমে বিপরিণামী, অর্থাৎ ক বাড়িলে খ কমিবে ও ক কমিলে খ বাড়িবে। কাবণ যাইবার গতির বেগ বাড়িলে যাইবার সময় সেই অনুপাতে কমিবে, এবং সেই গতির বেগ কমিলে যাইবার সময় সেই অনুপাতে বাড়িবে। এবং

$$\frac{ক}{খ} = \frac{খ'}{ক'}।$$

দুইটি রাশি, ক ও খ, যথাক্রমে বিপবিণামী হইলে, সেই সম্বন্ধ রাশিদ্বয়ের মধ্যে α এই চিহ্ন অঙ্কিত কবিয়া প্রকাশ করা যায়,

যথা, ক α খ ।

এবং ক ও খ বিপরীতক্রমে বিপবিণামী হইলে সেই সম্বন্ধ প্রথম রাশি ও দ্বিতীয় রাশির অন্ত্রোন্তক এই দুইটির মধ্যে α এই চিহ্ন অঙ্কিত করিয়া, প্রকাশ করা যায়,

যথা, ক $\alpha \frac{2}{\text{খ}}$ ।

কারণ, ক যখন খ'র সহিত বিপরীতক্রমে সমান্তরপাতী, তখন ক বাড়িলে সেট অনুরূপে খ কমিবে অর্থাৎ $\frac{2}{\text{খ}}$ বাড়িবে, এবং ক কমিলে সেই অনুরূপে খ বাড়িবে অর্থাৎ $\frac{2}{\text{খ}}$ কমিবে। সুতরাং ক এবং $\frac{2}{\text{খ}}$ একরূপ হলে যথাক্রমে সমান্তরপাতী ।

অতএব দেখা যাইতেছে α এই চিহ্ন যথাক্রমে বিপবিণামের চিহ্ন, এবং ইহা কেবল যথাক্রমে বিপবিণামী রাশিদ্বয়ের মধ্যে অঙ্কিত হয় ।

উপরে দ্রব্যের মূল্য ও পরিমাণ যথাক্রমে বিপরিণামী এই কথা বলিবার সময় আভাস দেওয়া হইয়াছে যে, তাহা সর্বত্র না ঘটিতে পারে । বাস্তবিকও তাহা সর্বত্র ঘটে না, এবং তাহা'র কারণও আছে। যথা, এক খণ্ড একরতি হীরকের যে মূল্য, এক খণ্ড দশবতি হীৰকের মূল্য তাহা'র দশগুণ নহে, তদপেক্ষা অনেক অধিক । এবং তাহা'র কারণ এই যে, বড় বড় হীরকখণ্ড অতি দুর্লভ অথচ অতি সুন্দর, এবং ছোট ছোট হীৰক খণ্ড একত্র করিয়া বড় হীরক খণ্ড প্রস্তুত করা যায় না । কিন্তু স্বর্ণ সেরূপ নহে, এবং এক তোলা স্বর্ণের যে মূল্য, দশতোলা স্বর্ণের মূল্য ঠিক তাহা'র দশগুণ, কারণ পৃথক্ পৃথক্ দশতোলা স্বর্ণ হইতে, ইচ্ছা কবিলে গলাইয়া একত্র করিয়া, একখণ্ড দশতোলা স্বর্ণ প্রস্তুত কবিতে পারা যায় ।

১৩৭। যদি ক α খ,

তাহা হইলে ক = নখ,

যথায় ন একটি নিশ্চয় অর্থাৎ অপরিবর্তনশীল রাশি ।

কাবণ, মনে কব k , ও x , k ও x র সমসাময়িক পরিবর্তিত পরিমাণ,
তাহা হইলে $\frac{k}{x} = \frac{k_1}{x_1}$, অর্থাৎ $k = \frac{k_1}{x_1} x$ ।

এবং $\frac{k_1}{x_1}$ এর পরিমাণ সর্বদাই স্থান থাকিবে, অর্থাৎ ইহা একটি
নিত্যবাশি।

$$\therefore k = n x।$$

সেইরূপে দেখা যাইবে,

$$\text{যদি } k \propto \frac{1}{x},$$

$$\text{তাহা হইলে } k = n \times \frac{1}{x} = \frac{n}{x}।$$

১৩৮। যদি $k \propto x$, এবং $x \propto g$,

তাহা হইলে $k \propto g$ ।

কাবণ, যখন $k \propto x$, তখন $k = n x$,

এবং যখন $x \propto g$, তখন $x = p g$,

$$\therefore k = n p g।$$

এবং n ও p নিত্যবাশি,

$$\therefore k \propto g।$$

১৩৯। যদি $k \propto g$, এবং $x \propto g$,

তাহা হইলে $(k \pm x) \propto g$, এবং $\sqrt{kx} \propto g$ ।

কাবণ, মনে কর $k = n g$, $x = p g$,

$$\therefore k \pm x = (n \pm p) g$$

$$\text{ও } \sqrt{kx} = \sqrt{n p g^2} = \sqrt{n p} \times g।$$

এবং $n \pm p$ ও $\sqrt{n p}$ উভয়ই নিত্যবাশি।

১৪০। যদি $k \propto \frac{1}{x g}$,

$$\text{তাহা হইলে } x \propto \frac{k}{g}, \text{ গ } \propto \frac{k}{x}।$$

কারণ, মনে কর $k = n\theta$,

তাহা হইলে $\theta = \frac{k}{n\theta} = \frac{1}{n} \times \frac{k}{\theta}$,

এবং $\theta = \frac{k}{n\theta} = \frac{1}{n} \times \frac{k}{\theta}$ ।

১৪১। যদি $k \propto \theta$ যখন g অপরিবর্তনশীল থাকে,

এবং $k \propto g$ যখন θ অপরিবর্তনশীল থাকে,

তাহা হইলে $k \propto \theta g$ যখন θ ও g উভয়েই পরিবর্তিত হয় ।

কারণ, মনে কর প্রথমে g অপরিবর্তিত রহিল এবং θ যখন θ_1 হইল, তখন k , k_1 হইল, এবং পরে g যখন g_1 হইল তখন k , k_2 হইল ।

তাহা হইলে $\frac{k}{k_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, এবং $\frac{k_1}{k_2} = \frac{g_1}{g_2}$,

$\therefore \frac{k}{k_1} \times \frac{k_1}{k_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \times \frac{g_1}{g_2}$, অর্থাৎ $\frac{k}{k_2} = \frac{\theta_1 g_1}{\theta_2 g_2}$ ।

$\therefore k \propto \theta g$ ।

এই শেবোক্ত নিয়মের একটি উদাহরণ দেওয়া যাউক ।

মনে কর g সংখ্যক লোক θ সংখ্যক দিনে k সংখ্যক মণ খাদ্য আহার করে । তাহা হইলে লোকসংখ্যা g অপরিবর্তিত থাকিলে, এবং কেবল দিনের সংখ্যা θ পরিবর্তিত হইলে, খাদ্যের পরিমাণ k , দিনের সংখ্যা θ ’র বিপরীতানুপাতিক হইবে । এবং দিনের সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকিলে, খাদ্যের পরিমাণ k , লোকসংখ্যা g ’র বিপরীতানুপাতিক হইবে । আর যখন লোকেব সংখ্যা ও দিনের সংখ্যা উভয়েই পরিবর্তিত হয়, তখন খাদ্যের পরিমাণ k , θ ও g ’র গুণফলের বিপরীতানুপাতিক হইবে । অর্থাৎ, লোক সংখ্যা ঠিক থাকিয়া দিন θ দ্বিগুণ অর্থাৎ 2θ হইলে, k দ্বিগুণ অর্থাৎ $2k$ হইবে, এবং তাহার উপর যদি লোকসংখ্যা তিনগুণ অর্থাৎ $3g$ হয়, তাহা হইলে খাদ্যের পরিমাণ k , $3 \times 2k$ অর্থাৎ $6k$ হইবে ।

৮। উদাহরণমালা।

১। (১) কোন্ সংখ্যা ১ ও ৪ এই অমুপাতের উভয় পদে যোগ করিলে অমুপাত ৩ ও ৪ হইবে?

(২) যদি s ও x এই অমুপাত k ও x এই অমুপাতেব লম্বিত আকার হয়, তবে,

$$\frac{s+1}{x+1} > \frac{k+1}{x+1}, \text{ যদি } x > k।$$

(৩) যদি $৬s^2 + ৬x^2 = ১০$ হয়,

তবে s ও x এই অমুপাতেব পরিমাণ কত?

২। যদি k ও x গ s , তাহা হইলে,

$$(১) \frac{k^2}{x^2} + \frac{g^2}{x^2} = ১ \frac{k}{x}।$$

$$(২) \frac{(k-x)(k-g)}{k} = (k+g) - (x+g)।$$

$$(৩) \frac{k^2}{x} - \frac{g^2}{x} \text{ এই অমুপাত } \frac{k}{x^2} - \frac{g}{x^2} \text{ এই}$$

অমুপাতেব বিপরীত অমুপাত।

$$(৪) k^2x - xg^2 = kx(x-g)।$$

৩। (১) যদি $s+x \propto s-x$, তবে $s^2+x^2 \propto s$ হয়।

(২) যদি $s+x \propto x$ যখন s অপরিবর্তনশীল,

এবং $s+x \propto s$ যখন x অপরিবর্তনশীল,

তাহা হইলে $s+x+x \propto x$ হয়।

$$(৩) \text{ যদি } s \propto \frac{1}{x}, \text{ এবং যখন } s=৬, x=৫,$$

তাহা হইলে যখন $s=১৫$, তখন x কত?

নবম অধ্যায় ।

সমাস্তর শ্রেণী, সমগুণ শ্রেণী, লয় শ্রেণী ।

১৪২। যদি কোন বাশিশ্রেণি এক্রপ হয় যে, শ্রেণির প্রত্যেক বাশিব সহিত তাহার পরবর্ত্তী বাশিব সম্বন্ধ কোন একটি নির্দিষ্ট নিয়মাধীন, তাহা হইলে সেই বাশিশ্রেণিকে **শ্রেণী** বলে ।

যথা সাধারণ সংখ্যাপ্রণি, ১, ২, ৩, ৪
একটি শ্রেণী, কাবণ, এই শ্রেণির প্রত্যেক সংখ্যা তাহার পরবর্ত্তী সংখ্যা অপেক্ষা এক কম ।

আবার যুগ্মরাশি শ্রেণি ২, ৪, ৬
একটি শ্রেণী, এবং তাহাতে প্রত্যেক বাশি পরবর্ত্তী বাশি অপেক্ষা দুই কম ।

শ্রেণী নানাবিধ । তন্মধ্যে সমাস্তর শ্রেণী, সমগুণ শ্রেণী, ও লয় শ্রেণী, এই ত্রিবিধ শ্রেণীর বিষয় এই অধ্যায়ে আলোচিত হইবে ।

১৪৩। যে প্রকার শ্রেণীতে তাহার প্রত্যেক পদ ও তৎপরবর্ত্তী পদের অন্তর সমান, তাহাকে **সমাস্তর শ্রেণী** বলে ।

যথা ১, ২, ৩, ৪ (১)

৩, ৫, ৭, ৯ (২)

ক, ক+খ, ক+২খ, ক+৩খ (৩)

সমাস্তর শ্রেণীর কোন দুই পদ পদেব অন্তরকে **সাধারণ অন্তর** বলে ।

যথা উপবেব (১) শ্রেণীতে সাধারণ	অন্তর	১,
(২) .		২,
(৩)	..	খ ।

১৪৪। যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ক, ও সাধারণ অন্তর অ
ও পদের সংখ্যা ন হয়, তাহা হইলে

$$\begin{aligned}\text{ভাষ্য দ্বিতীয় পদ} &= ক + অ, \\ \text{তৃতীয়} &= ক + ২অ, \\ \text{চতুর্থ} &= ক + ৩অ, \\ \text{বতম} &= ক + (ন - ১)অ, \\ \text{শেষ} &= ক + (ন - ১)অ।\end{aligned}$$

১৪৫। এখন দেখা যাউক যদি এই সমান্তর শ্রেণীর ন পদের সমষ্টি স হয়, তবে স'র মূল্য কত।

$$স = ক + (ক + অ) + \dots + \{ক + (ন - ১)অ\},$$

এবং শ্রেণী বিপরীত ক্রমে লিখিলে

$$স = \{ক + (ন - ১)অ\} + \{ক + (ন - ২)অ\} + \dots + ক।$$

∴ যোগ করিলে,

$$\begin{aligned}২স &= \{২ক + (ন - ১)অ\} + \{২ক + (ন - ১)অ\} \\ &\quad + \dots + \{২ক + (ন - ১)অ\} \\ &= ন \times \{২ক + (ন - ১)অ\}।\end{aligned}$$

$$\therefore স = \frac{ন}{২} \{২ক + (ন - ১)অ\} \quad (১)$$

যদি শেষ পদকে ল বলা যায়, তাহা হইলে

$$ল = ক + (ন - ১)অ \quad (২)$$

$$\therefore স = \frac{ন}{২} \{ক + ক + (ন - ১)অ\}$$

$$= \frac{ন}{২} (ক + ল) \quad (৩)$$

$$\text{এবং রতমপদ } প = ক + (ন - ১) অ \quad (৪)$$

১৪৬। যে কোন সমান্তর শ্রেণীর ক, অ, ন, স, ল, প, র এই সাতটির মধ্যে কোন তিনটি জানা থাকিলে, অপব চারটি জানা যায়। আর তাহা জানিবার নিমিত্ত উপরের (১) হইতে (৬) সমীকরণই যথেষ্ট।

এই সংক্রান্ত দুইটি বিশেষ প্রশ্নের সমাধান প্রশ্নালী নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

১৪৭। প্রথমে $২ক$ ও $২অ$ এর মূল্য জানা থাকিলে $২ন$ মূল্য নির্ণয় করিবার প্রণালী।

$$২ন = \frac{২ক}{২} \{২ক + (২ন - ১) অ\}$$

[১৪৫ ধারাব (১) সমীকরণ]

$$\therefore ২ন^২ + (২ক - ২অ)২ন - ২ক = ০$$

$$\therefore ২ন = \frac{২ক - ২অ \pm \sqrt{(২ক - ২অ)^২ + ৮ক}}{২}$$

দেখা যাইতেছে $২ন$ বা দুইটি মূল্য পাওয়া যায়। অনেক স্থলে সে দুইটিই গ্রহণ করা যায়।

যথা, মনে কর $ক = ১৬$, $অ = -২$, $২ন = ১৬$,

তাহা হইলে $২ন = ১৬$ বা ৮ ।

এস্থলে প্রেরী ১৬ , ৯ , ৪ , ১ , -১ , -৩ , -৫ ইত্যাদি,

এবং এই প্রেরী প্রথম ১৬ পদ ও প্রথম ১৬ পদ উভয়েরই সমষ্টি $= ১৬$ ।

সুতরাং $২ন = ১৬$ ও $২ন = ৮$ উভয় মূল্যই গ্রহণযোগ্য।

দ্বিতীয়তঃ কোন দুইটি পদ জানা থাকিলে প্রেরী প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর জানিবার প্রণালী।

মনে কর ১ বতম পদ $= প$,

২ তম পদ $= ক$ ।

তাহা হইলে $প = ক + (১ - ১) অ$,

$$ক = ক + (১ - ১) অ।$$

$$\therefore প - ক = (১ - ১) অ,$$

$$\therefore অ = \frac{প - ক}{১ - ১}।$$

$$\text{এবং } ক = প - (১ - ১) অ = প - (১ - ১) \times \frac{প - ক}{১ - ১}$$

$$= \frac{ক(১ - ১) - প(১ - ১)}{১ - ১}।$$

১৪৮। কোন দুইটি রাশি ক ও খ'র মধ্যে, যদি এমন একটি রাশি গ সন্নিবেশিত করা যায় যে, ক, গ, খ এই তিনটিতে একটি সমান্তর শ্রেণী হয়, তাহা হইলে সেই সন্নিবিষ্ট রাশিকে অপব রাশিদ্বয়ের সমান্তর মধ্যম বলে।

$$\text{এস্থলে } ক - গ = গ - খ,$$

$$\therefore গ = \frac{ক + খ}{2}।$$

অর্থাৎ, কোন দুই রাশির সমান্তর মধ্যম সেই রাশিদ্বয়ের যোগফলের অর্ধেক।

কোন দুটি রাশি ক ও খ'র মধ্যে, যদি n সংখ্যক একরূপ রাশি সন্নিবেশিত করা যায় যে, সেই সমস্ত অর্থাৎ $(n+2)$ সংখ্যক রাশিগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে, তাহা হইলে অ যদি সাধারণ অন্তর হয়, তবে

$$খ = ক + (n + 1) অ।$$

[১৪৫ ধারার (২) সমীকরণ]

$$\text{অতএব } অ = \frac{খ - ক}{n + 1}।$$

এবং অ জানা গেলে সমস্ত শ্রেণীই জানা গেল।

১৪৯। এখন সমান্তর শ্রেণী সংক্রান্ত আর তিনটি প্রশ্নের সমাধান প্রণালী প্রদর্শিত হইবে।

(১) সাধারণ সংখ্যা শ্রেণি ১, ২, ৩, ৪ ইহা'র n সংখ্যক পদের সমষ্টি কত? মনে কর সমষ্টি S ।

$$\text{তাহা হইলে } S = ১ + ২ + ৩ + \dots + n$$

$$= \frac{n}{2} \{ ২ + (n - ১) \times ১ \}$$

$$= \frac{n(n + ১)}{2}।$$

(২) সাধারণ সংখ্যাশ্রেণির প্রথম n সংখক অযুগ্ম রাশির সমষ্টি কত?

$$\text{এস্থলে প্রথম পদ } = ১,$$

$$২য় = ১ + ২ = ৩,$$

$$\text{নতম } = ১ + (n - ১)২ = ২n - ১।$$

$$\therefore S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

$$= \frac{n}{2} \{1 + (n - 1) \times 2\}$$

$$= n^2।$$

(৩) সাধারণ সংখ্যাশ্রেণির প্রথম n সংখ্যক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি কত ?
মনে কর $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2।$

জানা আছে যে,

$$n^3 - (n - 1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$(n - 1)^3 - (n - 2)^3 = 3(n - 1)^2 - 3(n - 1) + 1$$

$$(n - 2)^3 - (n - 3)^3 = 3(n - 2)^2 - 3(n - 2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{যোগ দ্বারা } n^3 &= 3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &\quad - 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \\ &= 3 \times S - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n। \end{aligned}$$

$$\therefore 3S = n^3 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{n \times (2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}।$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}।$$

১৫০। যে শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে কোন একটি নির্দিষ্ট বাণি দ্বারা গুণ করিলে তাহাব পৰ্যবর্তী পদ পাওয়া যায়, তাহাকে **সমন্বিত শ্রেণী** বলে। এবং সেই নির্দিষ্ট গুণককে শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** বলে।

যথা	১,	২,	৪,	৮	ইত্যাদি
	৫,	১৫,	৪৫,	১৩৫	ইত্যাদি,
	ক.	কর,	কব ^২ ,	কব ^৩	ইত্যাদি,

সমগুণ শ্রেণী, এবং

১ম শ্রেণীর সাধারণ অস্থাপত্য ২,

২য় ৩,

৩য় ৪।

১৫১। যদি কোন সমগুণ শ্রেণীর প্রথম পদ ক, সাধারণ অস্থাপত্য ব, এবং পদের সংখ্যা ন, হয়, তাহা হইলে তাহাব

শেষ পদ ল = $ক r^{n-1}$

এবং যতম পদ ফ = $ক r^{y-1}$ ।

১৫২। এখন দেখা যাউক সমগুণ শ্রেণীর ন সংখ্যক পদের সমষ্টি কত।

মনে কব সেট সমষ্টি = স।

তাহা হইলে,

$$স = ক + কব + কর^২ + \dots + ক r^{n-2} + ক r^{n-1},$$

এবং সর কব + কব^২ + \dots + ক r^{n-2} + কর^{n-1} + ক r^n,

.. বিরোধ ঘাট

$$স(ব-১) = ক r^n - ক = ক(ব^n - ১)।$$

$$স = \frac{ক(ব^n - ১)}{ব - ১}। \quad (১)$$

যদি শেষ পদ ল হয়, তবে

$$ল = ক r^{n-1} \quad (২)$$

১৫৩। যদি $১ < r$ হয়, তাহা হইলে উপরের (১) সমীকরণ এই আকারে ধারণ করে, যথা

$$স = \frac{ক(১ - r^n)}{১ - r} \quad (১)$$

একুপ স্থলে ন বত বড হইবে, ১^n তত ছোট হইবে, যথা $১^n = ১$ হইলে, $১^n = ১$, $১^n = ১$, ইত্যাদি । এবং ন যদি অতি বৃহৎ হয় তাহা হইলে ১^n অতি ক্ষুদ্র হইবে । আর ১^n বৃহৎ হইবে যেমন সীমা নাই, ১^n বৃহৎ হইবে তেমনই সীমা নাই । এই কথা সঙ্ক্ষেপে এইরূপে বলা যাইতে পারে,

$$১^n = ১ \text{ অনন্ত,}$$

$$১^n \text{ তখন} = ০ \text{ শূন্য।}$$

এবং শ্রেণী অসীম মনে করিলে, তাহাব অনন্ত পদ সমূহের সমষ্টি

$$S = \frac{১(১-০)}{১-১} = \frac{১}{১-১} \quad (১)$$

পশ্চাৎ প্রদর্শিত উদাহরণ দ্বারা এই কথা স্পষ্টরূপে বুঝা যাইবে ।

উদাহরণ ।

$$১, ১, ১, ১,$$

এই অসীম শ্রেণীর পদ সমূহের সমষ্টি কত ?

$$\text{এ স্থলে } ১ = ১, ১ = ১,$$

$$\therefore S = \frac{১}{১-১} = \frac{১}{১} = ১।$$

$$\text{অর্থাৎ } ১ + ১ + ১ + ১ + \dots = ১।$$

এই কথাটি নিম্নলিখিতরূপে ভাবিলে আরও স্পষ্ট বুঝা যাইবে ।

$$\overbrace{১ \quad ১ \quad ১ \quad ১}^{\text{অ, অ}_১, \text{অ}_২, \text{অ}_৩, \text{অ}_৪, \text{ই}}$$

$$\text{মনে কর বেধা } ১ \text{ অ, অ}_১ = ১ \times ১ = ১, \text{ই,}$$

$$\text{অ, অ}_২ = ১ \times ১, \text{ই, অ}_৩ \text{ অ}_৪ = ১ \times ১ \times ১, \text{ই} = ১ \times ১, \text{ই,}$$

$$\text{অ}_৫ \text{ অ}_৬ = ১ \times ১ \times ১ \times ১, \text{ই} = ১ \times ১, \text{ই, ইত্যাদি।}$$

তাহা হইলে, অ, ই'র অংশগুলি ক্রমে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া আসিবে, এবং তাহাদের সমষ্টি সমস্ত অ, ই'র সমান হইবে ।

$$\begin{aligned} \text{অর্থাৎ} \quad & \text{অ অ}_1 + \text{অ}_2 \text{ অ}_1 + \text{অ}_2 \text{ অ}_2 + \text{অ}_3 \text{ অ}_1 + \text{অ}_3 \text{ অ}_2 + \\ & = \text{অ অ}_1 (1 + 1 + 1 + 1 + \dots) \\ & = \text{অ অ}_1 + \text{অ}_1 \text{ অ}_1 \\ & = \text{অ অ}_1 \times 2 \end{aligned}$$

১৫৪। পোনঃপুনিক দশমিক এক প্রকার অসীম সমগুণ শ্রেণী, বাহাব সাধারণ অস্থাপত্য একেব নান, এবং পোনঃপুনিকেব মূল্য অসীম সমগুণ শ্রেণীৰ পদ সমষ্টি।

$$\text{যথা, } .3 = 0.333$$

$$\begin{aligned} & = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \\ & = \frac{3}{10} \left\{ 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \right\} \\ & = \frac{3}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{7} \\ & = \frac{3}{7} = 0.42857 \end{aligned}$$

সাধাবণতঃ মনে কব একটি দশমিক প্রথম দশমিকেব ঘব হইতেই পোনঃপুনিক, এবং তাহাব এক একটি পোনঃপুনিক ভাগে প সংখ্যক অঙ্ক আছে, ও সেই অঙ্কগুলি লইয়া দশমিক বিন্দুৰ প্রতি লক্ষ্য না বাখিলে যে রাশি হয় তাহা র। আব মনে কব সেই পোনঃপুনিক দশমিকেব মূল্য ন। তাচা হইলে

$$\begin{aligned} n & = \frac{b}{10^1 p} + \frac{b}{10^2 p} + \frac{b}{10^3 p} + \frac{b}{10^4 p} + \dots \\ & = \frac{b}{10^1 p} \left\{ 1 + \frac{1}{10^1 p} + \frac{1}{10^2 p} + \frac{1}{10^3 p} + \dots \right\} \\ & = \frac{b}{10^1 p} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^1 p}} = \frac{b}{10^1 p - 1} \\ & = \frac{b}{999 \dots (p \text{ সংখ্যক})} \end{aligned}$$

১৫৫। চক্রবৃদ্ধির নিয়মে টাকা'র হ্রদ চলিলে, বর্ষে বর্ষে মোট হ্রদ আসনের বৃদ্ধি, সমগুণশ্রেণী'র ঠিক পর পর পদের বৃদ্ধির জ্ঞার।

মনে কর, আসল=অ,

হ্রদের হাব বার্ষিক শতকবা=হ,

তাহা হইলে ১ম, ২য়, ৩য় ইত্যাদি বর্ষান্তে মোট হ্রদ আসল

$$= অ \left(1 + \frac{হ}{১০০} \right), অ \left(1 + \frac{হ}{১০০} \right)^২, অ \left(1 + \frac{হ}{১০০} \right)^৩, \text{ ইত্যাদি।}$$

এই সমগুণ শ্রেণীর সাধাবণ অহুপাত = $\left(1 + \frac{হ}{১০০} \right)$ ।

(পাটীগণিতের ১৫৭ ধারা দ্রষ্টব্য)।

১৫৬। কোন দুইটি বাশি ক ও খ'র মধ্যে যদি এমন একটি বাশি গ সন্নিবেশিত করা যায় যে, ক, গ, খ, এই তিনটিতে একটি সমগুণ শ্রেণী হয়, তাহা হইলে সেই সন্নিবিষ্ট বাশি গ'কে অপব বাশিঘরের সম্মুখের অক্ষর বলে।

$$\text{এস্থলে } \frac{ক}{গ} = \frac{গ}{খ},$$

$$\therefore গ^২ = কখ,$$

$$\therefore গ = \sqrt{কখ}।$$

অর্থাৎ, কোন দুই রাশির সমগুণ মধ্যম তাহাদেব গুণকলের বর্গমূল।

১৫৭। কোন দুইটি বাশি ক ও খ'র মধ্যে যদি n সংখ্যক একরূপ রাশি সন্নিবেশিত করা যায় যে, সেই সমস্ত অর্থাৎ (n+২) সংখ্যক বাশিগুলি একটি সমগুণ শ্রেণী হইবে, তাহা হইলে যদি র সাধাবণ অহুপাত হয় তবে

$$খ = ক ব^{n+১}।$$

[১৫২ ধাবাব (২) সমীকরণ]

$$\text{অতএব } ব = \left(\frac{খ}{ক} \right)^{\frac{১}{n+১}}।$$

১৫৮। সমগুণ শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত একেব নূন হইলে, সেরূপ শ্রেণীর অসাম পদসমষ্টিব সমাম মূল্য আছে, তাহা উপবে ১৫৩ ধারায় দেখা গিয়াছে। সাধারণ অনুপাত একেব অধিক হইলে, শ্রেণীর অসাম পদ সমষ্টিও অসাম হইবে, এবং প্রথম পদ হইতে যতই অগ্রসব হওয়া যাইবে অর্থাৎ অধিক সংখ্যক পদ লওয়া যাইবে, ততই প্রত্যেক পদ ও পদ সমষ্টি অতি দ্রুত গতিতে বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। তাহাব কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে দেওয়া যাইতেছে।

(১) উদাহরণ। প্রথমে এক দানা চিড়ে লও, তাহার পর ১×২ অর্থাৎ ২ দানা, তাহাব পর ২×২ অর্থাৎ ৪ দানা, তৎপবে ৪×২ অর্থাৎ ৮ দানা, একপে ক্রমশঃ ২২ বার পর্যন্ত লইয়া যতগুলি চিড়ে হয় তাহা একত্র কব। তাহাতে যতগুলি চিড়ে হইল তাহা ভক্ষণ করিতে পারিবে ?

এই প্রশ্নকে সচবাচর চিড়ের বাইশ ঘের সমস্তা বলে। এবং না ভাবিয়া অনেকে ইহাব উত্তবে হাঁ বলিবে। কিন্তু গণনা কবিয়া দেখিলেই বুঝা যাইবে, এই পরিমাণ চিপটিক অপব লোকেব কথা দবে পাকুক স্বয়ং বুকোদবও ভক্ষণ কবিতে পারিতেন না।

কাবণ, চিড়াব সংখ্যা যদি স হয়,

$$s = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + ৭ + ৮ + ৯ + ১০ + ১১ + ১২ + ১৩ + ১৪ + ১৫ + ১৬ + ১৭ + ১৮ + ১৯ + ২০ + ২১ + ২২$$

$$= \frac{১(২২ \times ২৩)}{২} = ২২ \times ১১ = ২৪২$$

গুজন কবিয়া দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ২৪২ দানা চিড়ে থাকে।

তাহা হইলে ২৪২ দানাতে অন্যান্য ২ মণ চিড়ে হইবে।

(২) উদাহরণ। কোন সমস্তা অথবা ইহাব একটি আদরের অর্থ ছিল। তাহার নালবান্দি ভালকপে বাহাতে হয় তন্নিমিত্ত তিনি লোকেব অনুসন্ধান করায়, একজন চতুব নালবান্দি আসিয়া বলিল, সে উত্তম রূপে নালবান্দি করিয়া দিবে, কিন্তু তাহাব পবিত্রমেব ও নালেব মূল্য, ৮ খানি নালেব ৬টি হিসাবে ২৪টি পেরেকের প্রথম পেরেকের মূল্য ১ পরসা, দ্বিতীয় পেরেকের মূল্য ১×২ অর্থাৎ ২ পরসা, তৃতীয় পেরেকের মূল্য ১×৩ অর্থাৎ ৩ পরসা, চতুর্থ পেরেকের মূল্য ৪×২ অর্থাৎ ৮ পরসা, এই হিসাবে দিতে হইবে। অথাবোহী না ভাবিয়া তাহাতেই সম্মত হইলেন। তাহাকে কত টাকা দিতে হইবে ?

মনে কর পরসার সংখ্যা স।

$$\begin{aligned}\text{তাহা হইলে } s &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} \\ &= \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2^{21} - 1 \\ &= 16777215 \text{ পরস।}\end{aligned}$$

∴ নালবন্দেব খবচ = ২৬২১৪৩ টাকা ১৫ আনা ৩ পরস।

সেই আদবের অশ্বেব মূল্যও এত টাকা হইতে পাবে না।

(৩) উদাহরণ। এক জন লোভী ও চতুৰ ভূস্বামী এক বিধা উৰ্দ্ধরা গমের জমি বিলি কবিবাব সময় এই নিয়মে খাজানা চাহেন যে, প্রথম সপ্তাহে ১ দানা গম, দ্বিতীয়ে 1×2 অর্থাৎ ২ দানা, তৃতীয়ে 2×2 অর্থাৎ ৪ দানা, চতুর্থে 4×2 অর্থাৎ ৮ দানা, এই হিসাবে, বৎসবে ৫২ সপ্তাহ থাকায়, ৫২ দফা গম দিতে হইবে। একজন অবোধ প্রজা না বুঝিয়া তাহাট দিতে সম্মত হয়। তাহাকে বৎসবে কত খাজানা দিতে হইবে ?

মনে কর গমের দানার সংখ্যা স।

$$\begin{aligned}\text{তাহা হইলে } s &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{51} \\ &= \frac{2^{52} - 1}{2 - 1} = 2^{52} - 1 \\ &= 1125899906842624 \text{।}\end{aligned}$$

ওজন কবিতা দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ২১৬ দানা গম থাকে। অতএব উক্ত সংখ্যক গমের দানা ওজনে ৫২১২৯৯৫৬৮৭১৫ তোলা অর্থাৎ ১৬২৮৯৩৬১১৮ মণ। সুতবাং গম ১ টাকা মণ খবিলে, ১ বিধা জমির খাজানা ১৬২৮৯০৬১১৮ টাকা হইবে।

(৪) উদাহরণ। কথিত আছে, এক জন সন্ন্যাসী চতুৰঙ্গ অর্থাৎ সতবঙ্গ খেলা স্থাপ্তি কবিতা, তাহা এক রাজাকে শিখাইয়া দেওয়ার, রাজা তুষ্ট হইয়া তাহাকে পারিতোষিক প্রার্থনা কবিত্তে বলেন। সন্ন্যাসী প্রথমে কিছু লইতে অস্বীকার কবিতা পবে বাজাব নিতান্ত অনুরোধে এই পারিতোষিক চাহে যে, সতবঙ্গ খেলার ভূমির প্রথম ঘবে তাহাকে ১ দানা চাউল, দ্বিতীয় ঘবে 1×2 অর্থাৎ ২ দানা, তৃতীয় ঘবে 2×2 অর্থাৎ ৪ দানা, এইরূপে ৬৪ ঘর পর্যন্ত

দেওয়া হউক । রাজা ইহাতে যৎসামান্য পরিমাণ তণ্ডুল হইবে মনে করিয়া, সন্ন্যাসী বিক্রম করিতেছে তাবিয়া বিবস্ত্রি প্রকাশ করেন । কিন্তু তাঁহার সুবিক্ত মন্ত্রী তাঁহাকে বুঝাইয়া দেন যে সন্ন্যাসী বাহ! চাহিতেছে তাহা রাজভাণ্ডারে নাই । 'তণ্ডুলের পরিমাণ নির্ণয় কব ।

মনে কর তণ্ডুলের সংখ্যা স ।

$$\text{তাহা হইলে } s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$$

$$= \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 2^{100} - 1 ।$$

ওজন করিয়া দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ৭২০ টির অধিক তণ্ডুল থাকে না । অতএব উক্ত সংখ্যক তণ্ডুলের ওজন

$$20015228730282 \text{ মণের ন্যূন হইবে না ।}$$

এত তণ্ডুল কোন বাজার ভাণ্ডাবেট থাকিতে পারে না ।

১৫২। যে প্রকার শ্রেণীর পদেব অন্তোক্তকগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আবদ্ধ, তাহাকে লয় শ্রেণী বলে ।

$$\text{যথা, } 1, 3, 5, 7, 9$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

$$\text{লয় শ্রেণী, কাৰণ,}$$

$$1, 2, 3, 4, 5$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

সমান্তর শ্রেণী ।

$$\text{সাধাবণতঃ } k, k_1, k_2$$

লয় শ্রেণী হইবে, যদি

$$\frac{1}{k}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}$$

সমান্তর শ্রেণী হয় ।

সমান্তর শ্রেণীর ও সমস্ত শ্রেণীর নামেব সার্থকতা সহজেই বুঝা যায়, কেন না উক্ত নামদ্বয় তত্ত্বপ্রকার শ্রেণীর লক্ষণানুযায়ী, কিন্তু লয় শ্রেণীর নাম কেন এরূপ হইল তাহা তত সহজে বুঝা যায় না । এই প্রকার শ্রেণী

এই নামে অভিহিত হইবার হেতু এই যে, এক পদার্থে নির্মিত এক ভায়ে টানা তিনটি তারের দৈর্ঘ্য, ১, ২, ৩ এই অনুপাতে যদি থাকে, তাহা হইলে সেই তারত্রয় ধ্বনিত হইলে তাহাদের স্বর লক্ষ্যমন্ত ও সুশ্রাব্য হয়।

১৬০। যদি ক, গ, খ, তিনটি বাশি লর শ্রেণীর পর পর পদত্রয় হয়, তবে গকে ক ও খ'র লক্ষ্যমন্ত বলে।

$$\text{এবং } \frac{১}{খ} - \frac{১}{গ} = \frac{১}{গ} - \frac{১}{ক},$$

$$\therefore (গ - খ) \times কগ = (ক - গ)খগ,$$

$$\therefore ক(গ - খ) = খ(ক - গ)$$

$$\therefore ক খ ক - গ গ - খ।$$

$$\text{এবং } \frac{২}{গ} = \frac{১}{ক} + \frac{১}{খ}, \therefore গ = \frac{ক + খ}{২কখ}$$

১৬১। লর শ্রেণী সঙ্কীর অনেক প্রশ্নের সমাধান সমাস্তর শ্রেণী সঙ্কীর প্রশ্নসমাধানের উপর নির্ভব কবে।

যথা, ক ও খ'ব মধ্যে যদি ন সংখ্যক এমন বাশি সরিবেশিত করিতে হয় যে, তাহারা সমস্ত লর শ্রেণীর পদ হইবে, তাগা হইলে অগ্রে $\frac{১}{ক}$ ও $\frac{১}{খ}$ 'ব মধ্যে ন সংখ্যক এক্রপ পদ সরিবেশিত করিতে হইবে যে, তাহারা সমাস্তর শ্রেণীর পদ হইবে, এবং তৎপবে তাহাদের অন্তোল্লক পদ লইলেই লর শ্রেণীর পদগুলি পাওয়া যাইবে।

অর্থাৎ অ যদি সেই সমাপ্রব শ্রেণীর সাধাবণ অন্তব হয়, তবে

$$\frac{১}{খ} = \frac{১}{ক} + (ন + ১)অ।$$

$$\therefore অ = \frac{(ক - খ)}{(ন + ১)কখ}।$$

এবং সমাস্তর শ্রেণী এই--

$$\frac{১}{গ}, \frac{১}{ক} + অ, \frac{১}{খ} + ২অ, \text{ ইত্যাদি।}$$

আব এই পদগুলির অন্তোল্লকগুলি ইষ্ট লর শ্রেণীর পদ।

১৬২। যদি g_1, g_2, g_3 বর্ধাক্রমে ক ও খ^২র সমান্তর মধ্যম, সমগুণ মধ্যম, ও লরমধ্যম হয়, তাহা হইলে g_1 ও g_3 এর সমগুণ মধ্যম, g_2 হইবে,

$$\text{অর্থাৎ } g_2 = \sqrt{g_1 g_3}.$$

$$\text{এবং } g_1 > g_2 > g_3.$$

$$\text{কারণ, } g_1 = \frac{k+x}{2},$$

$$g_2 = \sqrt{kx},$$

$$g_3 = \frac{2kx}{k+x}.$$

$$\begin{aligned} \therefore g_1 g_3 &= \frac{k+x}{2} \times \frac{2kx}{k+x} = kx \\ &= g_2^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{আর, } g_1 - g_3 &= \frac{k+x}{2} - \sqrt{kx} \\ &= \frac{k - 2\sqrt{kx} + x}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{x})^2}{2}, \end{aligned}$$

এবং $(\sqrt{k} - \sqrt{x})^2$ একটি রাশির দ্বিতীয় শক্তি, অতএব তাহা ধনরাশি।

অতরাং

$$g_1 > g_3.$$

$$\text{আবার } g_1 g_3 = g_2^2,$$

$$\therefore \frac{g_1}{g_2} = \frac{g_2}{g_3}.$$

$$\text{কিন্তু } g_1 > g_2,$$

$$\therefore g_2 > g_3.$$

১৬০। তিনটি বাশি ক, খ, গ, সমান্তর, সমগুণ বা লম্বশ্রেণীর পর পব্.

পদত্রয়, যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ} = \frac{ক}{গ}$ বা $= \frac{ক}{খ}$ বা $= \frac{ক}{গ}$ ।

কারণ, যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ} = \frac{ক}{গ} = ১,$

তাহা হইলে $ক-খ = খ-গ$ ।

যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ} = \frac{ক}{খ},$

তাহা হইলে $খ(ক-খ) = ক(খ-গ),$

\therefore $খ^২ = কগ$ ।

এবং যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ} = \frac{ক}{গ},$

তাহা হইলে $কগ-খগ = কখ-কগ,$

\therefore $খগ-কগ = কগ-কখ$

\therefore কখগ দ্বিগুণ ভাগ করিলে

$$\frac{১}{ক} - \frac{১}{খ} = \frac{১}{খ} - \frac{১}{গ} ।$$

৯। উদাহরণমালা।

১। (১) যদি ক, খ, গ, ঘ সমান্তর শ্রেণীর পব পব চারিটি পদ হয়, তাহা হইলে

$$ক + ঘ = খ + গ।$$

(২) ১০, ২০, ৩০ - এই শ্রেণীর প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত ?

(৩) ক + স, ক, ক - স, ক - ২স এই শ্রেণীর প্রথম আটটি পদের সমষ্টি কত ?

(৪) যদি ক^২, খ^২, গ^২ সমান্তর শ্রেণী হয় তবে $\frac{১}{খ+গ}, \frac{১}{গ+ক}, \frac{১}{ক+খ}$ উচাবাও সমান্তর শ্রেণীর পর পর পদ।

(৫) যে কোন সমান্তর শ্রেণীর পব পব ৬টি পদের প্রথম ও শেষ পদের যোগফল ৩য় ও ৪র্থ পদের যোগফলের সমান।

২। (১) যদি ক, প, গ, ঘ সমগুণ শ্রেণীর পব পব পদ হয় তাহা হইলে কঘ = খগ।

(২) ১০, ২০, ৪০ এই শ্রেণীর প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত ?

(৩) ১, ১১, ১১১, ১১১১ এই অসীম শ্রেণীর সমষ্টি কত ?

(৪) একটি সমগুণ শ্রেণীর তিনটি পব পব পদ আর একটি সমগুণ শ্রেণীর পর পর পদত্রয় হইতে বিযুক্ত কবিতা দেখা গেল বিয়োগফলত্রয়ও সমগুণ শ্রেণীর পর পর পদ।

এই শ্রেণীত্রয়ের সাধারণ অনুপাত যে সমান ইহা সপ্রমাণ কব।

(৫) একটি সমগুণ শ্রেণীর তিনটি পর পব পদের সমষ্টি ২৪ $\frac{১}{২}$, ও গুণফল ৬৪। পদ তিনটি কি কি ?

৩। (১) যদি ক, খ, গ লয় শ্রেণীর পর পর পদ হয়, তাহা হইলে খগ, গক, কখ সমান্তর শ্রেণীর পর পব পদ হইবে।

(২) একটি লয়শ্রেণীর নতম পদ ম, ম তম পদ ন। তাহার র তম পদ $\frac{মন}{২}$, ইহা সপ্রমাণ কব।

(৩) যদি ক, খ, গ সমান্তর শ্রেণীর পর পর পদত্রয় হয়, তাহা হইলে

$$\frac{\text{খগ}}{\text{ক(খ+গ)}} = \frac{\text{গক}}{\text{খ(গ+ক)}} = \frac{\text{কখ}}{\text{গ(ক+খ)}}$$

লর শ্রেণীর পর পর পদত্রয় হইবে, ইহা সপ্রমাণ কর ।

(৪) যদি ক, খ, গ, লরশ্রেণীর পর পর পদত্রয় হয়, তাহা হইলে

$$\frac{\text{ক}}{\text{খ+গ}} = \frac{\text{খ}}{\text{গ+ক}} = \frac{\text{গ}}{\text{ক+খ}}, \text{ ইহারাপ্রতি}$$

লর শ্রেণীর পর পর পদত্রয় হইবে ।

(৫) একটি লর শ্রেণীর প্রথম পদ ক, ও নতম পদ গ । তাহার নতম পদ কি ?

দশম অধ্যায় ।

প্রস্তার ও সংযোগ ।

১৬৪। অনেকগুলি ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থাকিলে, তাহাদিগকে অথবা তাহাদিগের মধ্যে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুকে, কত প্রকারে সাজান বাইতে পারে, তাহা জানিতে সহজেই কোতূহল জন্মে, এবং কখন কখন প্রয়োজনও হয় ।

এই গণিতের গ্রন্থ তিন ভাগে বিভক্ত, পাটীগণিত, বীজগণিত, ও জ্যামিতি । কোন ছাত্রের জানিতে ইচ্ছা হইতে পারে, এই তিন খণ্ড পুস্তক কত রকমে সাজান যায় । যেথা বাইতেছে

- | | | | |
|-----|-----------|-----------|------------|
| (১) | পাটীগণিত, | বীজগণিত, | জ্যামিতি । |
| (২) | পাটীগণিত, | জ্যামিতি, | বীজগণিত । |
| (৩) | বীজগণিত, | পাটীগণিত, | জ্যামিতি । |
| (৪) | বীজগণিত, | জ্যামিতি, | পাটীগণিত । |
| (৫) | জ্যামিতি, | পাটীগণিত, | বীজগণিত । |
| (৬) | জ্যামিতি, | বীজগণিত, | পাটীগণিত । |

এই ছয় প্রকারে তাহাদিগকে সাজান বাইতে পারে ।

আবার যদি সাজানব অগ্রপশ্চাৎ ধৰ্ত্তব্য না হয়, এবং কেবল পুস্তকগুলির সমষ্টিব প্রতি লক্ষ্য বাধি, তাহা হইলে কেবল একটি মাত্র সমষ্টি পাওয়া বাইবে, (১) হইতে (৬) যেটিই লওয়া যাউক প্রত্যেকটিতেই তিনখানি পুস্তক আছে ।

এখন যেথা যাউক দুইখানি করিয়া লইলে পুস্তকগুলিকে কত রকমে সাজান যায় । যেথা বাইতেছে

- | | | |
|-----|-----------|------------|
| (১) | পাটীগণিত, | বীজগণিত । |
| (২) | পাটীগণিত, | জ্যামিতি । |
| (৩) | বীজগণিত, | পাটীগণিত । |
| (৪) | বীজগণিত, | জ্যামিতি । |
| (৫) | জ্যামিতি, | পাটীগণিত । |
| (৬) | জ্যামিতি, | বীজগণিত । |

এবারে এই ছয় প্রকারে সাজান যায় ।

যদি সাজানব অগ্রপশ্চাত্ত্বৰ্ধব্য না হয়, এবং কেবল পুস্তকেব সমষ্টির প্রতি লক্ষ্য রাখা যায়, তাহা হইলে কেবল (১), (২), ও (৬) অর্থাৎ

পাটীগণিত, বীজগণিত ।

পাটীগণিত, জ্যামিতি ।

বীজগণিত, জ্যামিতি ।

এই তিনটি বিভিন্ন সমষ্টি পাওয়া যায় । কারণ (৩), (৪), ও (৫), সমষ্টির হিসাবে (১), (৬), ও (২), হইতে ভিন্ন নহে ।

১৬৫ । ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর অগ্রপশ্চাত্ত্বৰ্ধব্য প্রতি দৃষ্টি বাখিয়া ভিন্ন ভিন্ন সাজানকে তাহাদের প্রস্তান্ন বলে ।

ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর অগ্রপশ্চাত্ত্বৰ্ধব্য প্রতি দৃষ্টি না বাখিয়া ভিন্ন ভিন্ন সমষ্টিকে তাহাদের সন্মিশ্রণ বলে ।

যথা ক, খ, গ, এই তিনটি অক্ষরেব অগ্রপশ্চাত্ত্বৰ্ধব্য প্রতি দৃষ্টি বাখিয়া ছই ছইটি করিয়া সাজান, অর্থাৎ কখ, কগ, খগ, খক, গক, গখ, এই ছয়টি, তাহাদের প্রস্তাব । এবং কখ, কগ, গখ, এই তিনটি, তাহাদের সংযোগ, বাবণ,

খক, গক, খগ, সমষ্টি হিসাবে

কখ, কগ, গখ ছইতে ভিন্ন নহে ।

ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বারে ব সংখ্যক লইয়া তাহাদের
প্রস্তাবের সংখ্যা $\frac{n}{b}$ এই চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কবা যাইবে ।

ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বাবে ব সংখ্যক লইয়া তাহাদের
সংযোগের সংখ্যা $\frac{n}{b}$ এই চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কবা যাইবে ।

১৬৬ । এখন দেখা যাউক ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বারে
ব সংখ্যক লইলে, প্রস্তাবের সংখ্যা অর্থাৎ $\frac{n}{b}$ ইহার মূল্য কত ।

এই প্রশ্ন আর এক ভাবে দেখিলে ইহার অর্থ এই যে, ব সংখ্যক স্থান
ন সংখ্যক ভিন্ন বস্তু দ্বারা কত ভিন্ন ভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায় তাহাই নির্ণয়
কবিতে হইবে ।

যখন n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু আছে, তখন প্রথম স্থানটি তাহাদের এক একটি দ্বারা n প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

তাহাব পর রহিল $(n-1)$ সংখ্যক বস্তু, এবং দ্বিতীয় স্থানটি তাহাদের এক একটি দ্বারা $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

আব, এই দ্বিতীয় $(n-1)$ প্রকার, প্রথম n প্রকারের প্রত্যেকের সহিত লগ্না যায়। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান, $n(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

তাহাব পর রহিল $(n-2)$ সংখ্যক বস্তু, এবং তৃতীয় স্থানটি তাহাদের এক একটি দ্বারা $(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

আর এই তৃতীয় $(n-2)$ প্রকার প্রথম দুইটি স্থান পূরণের $n(n-1)$ প্রকারের প্রত্যেকের সহিত লগ্না যায়। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান $n(n-1)(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

দেখা যাউতেছে, এইরূপে এক একটি স্থান বৃদ্ধি, অর্থাৎ গৃহীত বস্তুর সংখ্যা একটি একটি কবিয়া বৃদ্ধি, সঙ্গে সঙ্গে প্রস্তাবের সংখ্যাবও এক একটি গুণক বৃদ্ধি হইতেছে, এবং স্থানের অর্থাৎ গৃহীত বস্তুর সংখ্যা r হইলে, শেষ গুণক $n-(r-1)=n-r+1$ হইবে।

অতএব n সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যা লগ্না প্রস্তাব করিলে,

প্রস্তাবের সংখ্যা $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ হইবে।

অর্থাৎ ${}^nP_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ ।

যদি প্রত্যেকে বাবে n সংখ্যক বস্তু সমস্তই লগ্না যায়, তাহা হইলে প্রস্তাবের সংখ্যা $= n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)$

$$= n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

এই শেষের লিখিত বাণি, ${}_nP_n$ এই চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$\therefore {}^nP_n = {}_nP_n$$

(১) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর তিনটি কবিয়া লইলে প্রস্তাবের সংখ্যা কত?

$$\text{প্রস্তাবের সংখ্যা} = 3(3-1)(3-2) = 6$$

(২) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর দুইটি কবিতা লইলে প্রান্তরের সংখ্যা কত ?

$$\text{প্রান্তরের সংখ্যা} = ৩(৩-১) = ৬।$$

১৬৭। এক্ষেপে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর প্রত্যেক বাবে r সংখ্যক লইলে কতগুলি বিভিন্ন সংযোগ বা সমষ্টি হয়, তাহা নিরূপণ করা যাউক। এই সংযোগ সংখ্যা nJ_r ।

এই nJ_r সংখ্যক সমষ্টির প্রত্যেক সমষ্টিতে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু আছে, এবং তাহাদের প্রস্তাবেব সংখ্যা পূর্ব ধাবা অনুসাবে

$$\begin{aligned} &= r(r-1)(r-2) \dots 1 \\ &= [r]। \end{aligned}$$

অতএব nJ_r কে $[r]$ দিয়া গুণ করিলে, n সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বাবে r সংখ্যক লইলে যতগুলি প্রস্তাব হয় তাহার সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$$\text{অর্থাৎ } {}^nJ_r \times [r] = {}^nJ_{r+1}$$

$$= n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

$$\therefore {}^nJ_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{[r]} \quad (১)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \dots 1}{[r] \times (n-r)(n-r-1) \dots 1}$$

$$= \frac{[n]}{[r][n-r]} \quad (২)$$

(১) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর দুইটি কবিতা লইলে সংযোগের সংখ্যা কত ?

$${}_3J_2 = \frac{৩ \cdot ২ \cdot ১}{১ \cdot ২} = ৩।$$

(২) উদাহরণ । তিনটি বস্তুর তিনটি করিয়া লইলে সংযোগের সংখ্যা কত ?

$${}_3S = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1 ।$$

১৬৮ । বিভিন্ন n সংখ্যক বস্তুর সংযোগ সংখ্যা, প্রত্যেক বারে r সংখ্যক লইলে যাহা হয়, প্রত্যেক বারে $(n-r)$ সংখ্যক লইলেও ঠিক তাহাই হয় ।

কারণ, প্রত্যেক বারে n সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক লইলে সংযোগ সংখ্যা

$${}_nS_r = \frac{n!}{r! (n-r)!} ।$$

অতএব এই বাশিতে r স্থানে $(n-r)$ লিখিলেই n সংখ্যক বস্তুর $(n-r)$ সংখ্যক লইলে যে সংযোগ সংখ্যা হয় তাহা পাওয়া যাইবে ।

$$\begin{aligned} \therefore {}_nS_{n-r} &= \frac{n!}{(n-r)! (n-(n-r))!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)! r!} \\ &= {}_nS_r । \end{aligned}$$

এই কথাটি অক্ষ বা অক্ষরপ্রয়োগপ্রক্রিয়ায় কোন সাহায্য না লইরাও আব একপ্রকারে অতি সহজে সপ্রমাণ করা যায় ।

যথা—

বিভিন্ন n সংখ্যক বস্তু হইতে যতবার ভিন্ন ভিন্ন r সংখ্যক বস্তু লইবে তাহাব প্রত্যেক বারেরই $(n-r)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু পড়িবার থাকিবে । যতবার r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সংযোগ বা সমষ্টি যতগুলি, $(n-r)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সংযোগ বা সমষ্টি ঠিক ততগুলি অবশ্যই হইবে ।

১৬৯ । উপরে ১৬৬ দ্বারায় দেখা গিয়াছে, n সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক লইয়া যে প্রস্তার হয় তাহাব সংখ্যা, r বস্তু বৃদ্ধি পাব ততই বৃদ্ধি পাইতে

থাকে, কারণ বএব পরিমাণ এক এক করিয়া যেমন বৃদ্ধি পায়, প্রস্তারের • সংখ্যা একের অন্যান্য একটি একটি গুণকের দ্বারা গুণিত হইতে থাকে ।

সুতরাং যখন $r = n$, তখনই

n শব্দ এবং মূল্য গবিষ্ঠ ।

কিন্তু ১৬৮ ধারার মেথা গিয়াছে n সংখ্যক বস্তু ব r সংখ্যক লইয়া যে সংযোগ সংখ্যা হয়, $(n - b)$ সংখ্যক লইয়াও সংযোগ সংখ্যা ঠিক তাহাই হয় । সুতরাং বএব বৃদ্ধির সঙ্গে সংযোগ সংখ্যা কিয়ৎকি বৃদ্ধি পাইতে পারে কিন্তু শেষ পর্য্যন্ত নহে ।

অতএব বএব সংখ্যা কত হইলে সংযোগ সংখ্যা গবিষ্ঠ হইবে তাহা নির্ণয় করা আবশ্যক ।

মেথা যাইতেছে

$$n_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-b+2)}{(b-1)(b-2) \dots 1},$$

$$n_{r-b} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-b+1)}{b(b-1)(b-2) \dots 1},$$

$$\therefore n_{r-b} = \frac{n-b+1}{b} \times n_{r-b-1} \\ = \left(\frac{n+1}{b} - 1 \right) \times n_{r-b-1} ।$$

অতএব যতক্ষণ $\left(\frac{n+1}{b} - 1 \right)$ একের অধিক থাকিবে ততক্ষণ ব এব সঙ্গে সঙ্গে সংযোগ সংখ্যা বৃদ্ধি পাইবে ।

প্রথমতঃ মনে কর n যুগ্ম এবং $= ২ম$ ।

তাহা হইলে $\frac{n+1}{b} - 1 = \frac{২ম+১}{২} - ১,$

এবং b যতক্ষণ m ব অনধিক,

ততক্ষণ $\frac{n+1}{b} - 1 > ১$ ।

অতএব যখন $v = w = \frac{n}{2}$,

তখন ${}^nJ_{\frac{n}{2}}$ গরিষ্ঠ ।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর n অযুগ্ম এবং $= ২w + ১$ ।

তাহা হইলে $\frac{n+১}{২} - ১ = \frac{২w+১+১}{২} - ১$
 $= \frac{২w+২}{২} - ১$

$= ১,$

যখন $v = w + ১$
 $= \frac{n+১}{২}$

এবং তখন ${}^nJ_{\frac{n+১}{২}}$ গরিষ্ঠ ।

আবার যখন $w = \frac{n-১}{২}$,

তখনও ${}^nJ_{\frac{n-১}{২}}$ গরিষ্ঠ,

কারণ ${}^nJ_{\frac{n+১}{২}} = {}^nJ_{n - \frac{(n+১)}{২}}$
 $= {}^nJ_{\frac{n-১}{২}}$

১৭০। বিভিন্ন n সংখ্যক বস্তুর v সংখ্যক লইলে প্রস্তাবের ও সংযোগের সংখ্যা কত কত হয় তাহা উপরে নির্ণীত হইয়াছে । n সংখ্যক বস্তু সমস্ত বিভিন্ন না হইলে তাহার v সংখ্যক লইয়া প্রস্তাবের ও সংযোগের সংখ্যা কত কত হয়, তাহা নির্ণয় করা কিছু জটিল । তবে তাহাদের সমস্ত লইয়া প্রস্তাবের সংখ্যা নির্ণয় করা সহজ, ও তাহাব প্রণালী নিয়ে দর্শিত হইতেছে ।

মনে কর n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে k সংখ্যক বস্তু এক বকমের, b সংখ্যক আর এক বকমের, ও t সংখ্যক আর এক বকমের, এবং বাকি বস্তুগুলি সমস্ত বিভিন্ন বকমের। এবং মনে কব প্রস্তাবের সংখ্যা n ।

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে, যদি এই k সংখ্যক বস্তুগুলি বিভিন্ন প্রকারের হইত, তবে কেবল তাহাদের লইয়াই, এবং অপর বস্তুর স্থান পবিত্বন না করিয়া, প্রত্যেক প্রস্তাবের স্থলে $\lfloor k$ সংখ্যক প্রস্তাব হইত, এবং সমস্ত প্রস্তাবের সংখ্যা

$$n \times \lfloor k \text{ হইত।}$$

সেই কাৰণেই, যদি ঐ b সংখ্যক বস্তু আবার ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের হইত, তাহা হইলে সমস্ত প্রস্তাবের সংখ্যা পূৰ্ণ সংখ্যাব $\lfloor b$ গুণ হইত, অর্থাৎ সমস্ত সংখ্যা

$$n \times \lfloor k \times \lfloor b \text{ হইত :}$$

এবং ঐ t সংখ্যক বস্তু আবার ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের হইলে, সমস্ত প্রস্তাবের সংখ্যা

$$n \times \lfloor k \times \lfloor b \times \lfloor t \text{ হইত।}$$

কিন্তু এই শেষের লিখিত সংখ্যা, n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর সমস্ত লইয়া প্রস্তাবের সংখ্যা।

$$\text{অতএব } n \times \lfloor k \times \lfloor b \times \lfloor t = \lfloor n।$$

$$\therefore n = \frac{\lfloor n}{\lfloor k \lfloor b \lfloor t}।$$

(১) উদাহরণ। n বসন এত শব্দের অক্ষর গুলির কত প্রকার প্রস্তাব হইতে পারে ?

$$\text{প্রস্তাব সংখ্যা} = \frac{\lfloor ৫}{\lfloor ২ \lfloor ২} = ৩০।$$

(২) উদাহরণ। কতগুলি তিন অঙ্কের ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা ১২৫ এই দ্বাশির অঙ্কগুলি লইয়া হইতে পারে ?

$$\text{উত্তর} = \frac{\lfloor ৩}{\lfloor ২} = ৩।$$

১৭১। ন সংখ্যক বস্তুর র সংখ্যক লইয়া প্রস্তারের সংখ্যা কত হইবে, যদি প্রত্যেক বস্তু একবার হইতে ব বার পর্য্যন্ত এক প্রস্তারে লওয়া যাইতে পারে ?

এই প্রশ্ন আর এক ভাবে দেখিলে ইহার অর্থ এই যে, র সংখ্যক স্থান ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু দ্বারা পূর্ণ করিতে গেলে এবং প্রত্যেক প্রস্তাবে কোন একটি বস্তু এক হইতে র বার পর্য্যন্ত বাধা গ্রাহ্য হইলে, কত বিভিন্ন প্রকারে সেই স্থানগুলি পূর্ণ করা যায় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম স্থানটিতে ন সংখ্যক বস্তু ব যে কোনটি রাখা যায়, অতএব প্রথম স্থান ন সংখ্যক প্রকারে পূর্ণ করা যায়। তাহার পর দ্বিতীয় স্থানটি পূরণের নিমিত্ত (ন-১) সংখ্যক বস্তু আছে, এবং যখন প্রথম স্থানে স্থাপিত বস্তুটি যে কোন প্রস্তাবে একেব অধিকবার থাকিতে পারে, তখন সে বস্তুটিও দ্বিতীয় স্থানে থাকিতে পারে। অতএব দ্বিতীয় স্থান পূরণার্থেও ন সংখ্যক বস্তু আছে, আর দ্বিতীয় স্থানও ন সংখ্যক প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে। এবং তাহার প্রত্যেক প্রকার পূর্ণোক্ত প্রকারেব সাহিত লওয়া যাইতে পারে।

সুতরাং দুটি স্থান পূরণের প্রকারের সংখ্যা

$$= n \times n = n^2 ।$$

এইরূপে দেখা যায় তিনটি স্থান পূরণের প্রকারেব সংখ্যা

$$= n^2 \times n = n^3 । \text{ ইত্যাদি ।}$$

অতএব ব স্থান পূরণের প্রকারেব সংখ্যা

$$= n^b ।$$

(১) উদাহরণ। চাষিটি ছাত্রকে তিনগানি পারিতোষিক পুস্তক দেওয়া যাইবে, এবং প্রত্যেক ছাত্রই এক খানি হইতে সমস্ত তিন খানি পুস্তক লইতে পারে। পারিতোষিকগুলি কত রকমে দেওয়া যায় ?

$$\text{বক্সের সংখ্যা} = 8^3 = ৫১২ ।$$

(২) উদাহরণ। দুটি পদের নিমিত্ত পাঁচ জন প্রার্থী। প্রত্যেকেই একটি পদ বা দুইটিই পাইতে পারেন। নির্বাচন কত প্রকারে হইতে পারে ?

$$\text{নির্বাচনের প্রকারেব সংখ্যা} = ৫^2 = ২৫ ।$$

১৭২। যদি ন সংখ্যক বস্তু থাকে, তাহা হইলে তাহাদের কতিপয় বা সমস্ত কত প্রকারে লওয়া যাইতে পারে ?

প্রত্যেক বস্তু সম্বন্ধেই দ্বিবিধ প্রক্রিয়ার প্রয়োগ হইতে পারে, অর্থাৎ, তাহা লওয়া অথবা না লওয়া বাইতে পারে ।

দুটি বস্তু থাকিলে, প্রথমটিকে লওয়া না লওয়া এই দুই প্রক্রিয়ার প্রত্যেকের সহিত, দ্বিতীয়টিকে লওয়া না লওয়া এই দুই প্রক্রিয়ার সংযোগ হইতে পারে । সুতবাং দুটি বস্তু থাকিলে তাহাব কোন একটিকে বা উভয়কে লওয়া না লওয়া প্রক্রিয়ার প্রকাষেব সংখ্যা $= 2 \times 2 = 2^2$ ।

তাহার পর তৃতীয় বস্তু একটি থাকিলে, তাহাকে লওয়া না লওয়া এই দ্বিবিধ প্রক্রিয়া, উক্ত 2^2 সংখ্যক প্রক্রি়াব প্রত্যেকের সহিত সংযুক্ত হইতে পারে । সুতবাং তিনটি বস্তু থাকিলে তাহাদের কোন একটি কোন দুইটি বা সমস্ত তিনটি লওয়া না লওয়া প্রক্রি়াব প্রকাষেব সংখ্যা

$$= 2^2 \times 2 = 2^3 \text{ ।}$$

এইরূপে দেখা যাইতেছে ন সংখ্যক বস্তু থাকিলে তাহাদের কতিপয় বা সমস্ত লওয়া না লওয়া প্রক্রি়াব প্রকাষেব সংখ্যা

$$= 2^n \text{ ।}$$

কিন্তু এই 2^n সংখ্যক প্রক্রি়াব মধ্যে কোন একটি বস্তুকেও না লওয়া এট প্রক্রিয়াটি বহিরাছে, এবং সেটি প্রশ্নের উত্তরে গণনীয় নহে । সুতবাং প্রশ্নের উত্তর, অর্থাৎ ঈষ্ট সংখ্যা $= 2^n - 1$ ।

এই সংখ্যাকে ন সংখ্যক বস্তুর **সাকল্য সংযোগ সংখ্যা** বলে ।

১৭৩। ভাস্করাচার্যের লীলাবতী গ্রন্থেব ৪র্থ অধ্যায়ের ৬ষ্ঠ পরিচ্ছেদে এবং ১৩শ অধ্যায়ে প্রস্তার ও সংযোগ সম্বন্ধীয় অনেকগুলি বিচিত্র প্রশ্ন আছে। শিক্ষার্থী ঐ গ্রন্থেব সেট সেই ভাগ পাঠ কবিলে ভাল হয় ।

১৭৪। দেখা গিয়াছে ন সংখ্যক বস্তু **সাকল্য** দ্বিস্তা সাজাইলে প্রস্তারেব সংখ্যা $[2^n - 1]$ হইবে। যদি **চক্রাকারে** সাজান যায় তাহা হইলে সেই সংখ্যার কোন পরিবর্তন হইবে কি না দেখা আবশ্যক ।

যদি বস্তুগুলির প্রত্যেক প্রস্তারে তাহাদের নির্দিষ্ট স্থানেব প্রতি লক্ষ্য রাখা যায়, অথবা চক্রের ন সংখ্যক স্থানে যদি ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন প্রকারেব

*পৃথক্ আপন বস্তুগুলি বসাইবার নিমিত্ত থাকে, তাহা হইলে সহজেই বুঝা যায় যে প্রস্তারের সংখ্যা, সারি দিয়া সাজাইলে বাহ্য হয়, চক্রাকারে সাজাইলে ঠিক তাহাই হইবে ।

কিন্তু যদি বস্তুগুলি ব নির্দিষ্ট স্থানের প্রতি দৃষ্টি না রাখিয়া কেবল তাহাদের অগ্র পশ্চাতের প্রতি দৃষ্টি রাখা যায়, তাহা হইলে সারি দিয়া সাজানতে যতগুলি ভিন্ন প্রস্তাব হয়, চক্রাকারে সাজাইলে তাহাব অনেকগুলি অভিন্ন বলিয়া মনে হইবে ।

যথা, যদি ক খ গ ঘ এই চারিটি বস্তু থাকে, তাহা হইলে সারি দিয়া সাজানতে
ক খ গ ঘ, এবং খ গ ঘ ক এই দুইটি ভিন্ন ভিন্ন ।

কিন্তু চক্রাকারে সাজাইলে ও নির্দিষ্ট স্থানের প্রতি দৃষ্টি না রাখিয়া কেবল অগ্রপশ্চাতের প্রতি দৃষ্টি রাখিলে

ক খ গ ঘ এবং ঘ ক খ গ
গ ঘ

এই দুইটি অভিন্ন প্রস্তার বলিয়া বোধ হইবে ।

এ ভাবে দেখিলে ন সংখ্যক বস্তুব যে কোন একটিকে এক স্থানে স্থায়ী রাখিয়া অপব (ন-১) সংখ্যক বস্তুর স্থান পরিবর্তন দ্বারা প্রস্তার সংখ্যা বাহ্য হয় তাহা, অর্থাৎ [ন-১] প্রকৃত প্রস্তার সংখ্যা হইবে ।

যদি ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের মণি এক সূত্রে গাঁথিয়া মণিহার প্রস্তুত করা যায়, এবং সেট মানাবিধ মণির কোনটিরই সোজা উল্টা না থাকে ও প্রত্যেকের সকল দিকই সমান হয়, তাহাদিগকে গাঁথিবাব ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের সংখ্যা, অর্থাৎ প্রস্তাব-সংখ্যা, ৩ [ন-১] হইবে, কারণ দুইটি বিপরীত প্রস্তাব, মণিহার উল্টাইয়া লইলে একই হইবে ।

যথা, যদি ক খ গ ঘ চারিটি মণি থাকে,

ক খ গ ঘ এবং ঘ ক খ গ
গ ঘ

এই দুইটি প্রস্তারের প্রথমটি, হাব উল্টাইয়া লইলেই, দ্বিতীয়টির আকার ধারণ করিবে ।

১০। উদাহরণমালা।

১। (১) সাতটি বস্তুর চাবিটি করিয়া লইলে কতকগুলি প্রস্তার হয় ?

(২) পাঁচখানি আগনে পাঁচজন লোক বসিবেন। তাঁহারা কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন প্রকারে বসিতে পারেন ?

(৩) যদি লঘু ও গুরু এই দুটি মাত্রাব প্রত্যেকটি এক প্রস্তাবে এক হইতে তিনবার পর্যন্ত থাকিতে পারে, তাহা হইলে লঘু ও গুরু 'লইয়া' ত্রিমাত্রাব প্রস্তার কতগুলি হইতে পারে ?

(৪) কোন একটি পদেব প্রার্থী ৩ জন ও নির্বাচক ৫ জন। নির্বাচকেবা কতপ্রকারে তাঁহাদের অভিমত দিতে পারেন ?

(৫) ২৬১০১৪ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$= (n+1)(n+2)(n+3) \text{ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত,}$$

ইহা সপ্রমাণ কর।

২। (১) যদি ${}^n P_r = ১৭১$, ${}^n S_r = ১৩৬$,

তাহা হইলে n ও r কত কত ?

(২) দশজন্ম ছাত্র একটি পরীক্ষার প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হইয়াছে। তিনটি তুল্য ছাত্রবৃত্তি তাহাদিগকে দেওয়া বাটবে, এবং প্রত্যেকেই তাহাব একটি পাইতে পারে। ঐ ছাত্রবৃত্তি বিতরণেব দশ কত বিভিন্ন প্রকারেব হইতে পারে ?

(৩) পঞ্চদশভূজ সমতল ক্ষেত্রেব কতগুলি কর্ণ (কোণাকোণী বৈখা) আঁকিতে পারে ?

(৪) যদি ${}^n S_r = {}^n S_{r'}$,

তাহা হইলে $r = r'$, অথবা $r + r' = n$ ।

(৫) এক জন বিক্রেতার নিকট ২০টি পেয়াবা আছে তাহাব দর ১ আনার ৩টি। ছয় আনার পেয়াবা কিনিতে গেলে কত বকমে পেয়াবা বাছিয়া লওয়া যায়, এবং তাহার মধ্যে কত বকমে সর্বাপেক্ষা বড় পেয়াবাটি থাকিবে।

একাদশ অধ্যায়।

দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ।

১৭৫। গুণনদ্বারা জানা যায়,

$$(স + অ)^২ = স^২ + ২অস + অ^২,$$

$$(স + অ)^৩ = স^৩ + ৩অস^২ + ৩অ^২স + অ^৩,$$

$$(স + অ)^৪ = স^৪ + ৪অস^৩ + ৬অ^২স^২ + ৪অ^৩স + অ^৪।$$

তাহাতে দেখা যাইতেছে, দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে যে বাশিমালা পাওয়া যায় তাহা নিয়মবদ্ধ, যথা,

(১) প্রসারিত বাশিমালার পদ সংখ্যা শক্তিচিহ্ন অপেক্ষা এক অধিক।

(২) প্রথম ও শেষ পদের শক্তিচিহ্ন দ্বিপদের শক্তিচিহ্নের সমান, এবং অপব প্রত্যেক পদেরই অক্ষবর্গের শক্তিচিহ্নের যোগফল দ্বিপদের শক্তিচিহ্নের সমান, আর স'র শক্তিচিহ্ন ক্রমশঃ এক এক কবিরী হ্রাস ও অ'র শক্তিচিহ্ন এক এক কবিরী বৃদ্ধি পাইতেছে।

(৩) প্রথম ও শেষ পদের প্রকৃতি এক, অস্তান্ত পদের প্রকৃতি বিরূপে গঠিত হইল তাহা তত স্পষ্ট বুঝা যায় না।

এখন দেখা আবশ্যক,

$$(স + অ)^ন$$

এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে যে বাশিমালা পাওয়া যাইবে তাহা কি কি নিয়মের অধীন।

১৭৬। সেই নিয়মগুলি নিরূপণ করণার্থে অগ্রে একটি প্রাসঙ্গিক কথার কিঞ্চিৎ আলোচনা আবশ্যক।

সে কথটি সজ্জপে এই।—

যদি দেখা যায় যে, কোন নিয়ম প্রথম স্থল হইতে দুই একটি বিশেষ স্থলে খাটে, এবং যদি আবশ্য দেখা যায় যে, সেই নিয়ম যে কোন এক স্থলে খাটে

বলিয়া মানিয়া লইলে তাহার ঠিক পরবর্ত্তী স্থলেও তাহা অবশ্যই খাটিবে, তাহা হইলে নিশ্চিত বলা যায় যে, সে নিয়মটি সামান্যতঃ খাটে।

কারণ, যখন দেখা যাইতেছে, নিয়মটি যে কোন এক স্থলে খাটিলে তাৎপৰ্য পরবর্ত্তী স্থলে অবশ্যই খাটিবে, এবং যখন দেখা যাইতেছে তাহা প্রথম স্থল হইতে একটি বিশেষ স্থলে খাটে, তখন তাহা অবশ্যই তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিবে, এবং তাহা হইলেই আবার তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিবে। এইরূপে এক স্থলেব পর তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিতে থাকিবে। সুতরাং তাহা সাধাবণতঃ সৰ্বত্র খাটিবে।

এই প্রমাণপ্রণালীকে **পশিতেন্ন সামান্যানুমান** বলে, অর্থাৎ, এতদ্বারা বিশেষ তত্ত্ব হইতে সামান্য তত্ত্ব নিশ্চিত অনুমিত হয়।

অবশ্য রাণা আবশ্যক যে, দুই চাবিটি বিশেষ দৃষ্টান্ত দেখিয়া কোন সামান্য তত্ত্ব অনুমিত হইতে পারে না, যতক্ষণ না আবও দেখা যায় যে, সেই তত্ত্বটির সত্যতা যে কোন বিশেষ স্থলে মানিয়া লইলে তাহা অবশ্যই তৎপরবর্ত্তী স্থলেও সত্য হইবে। ১টি উদাহরণ দৃষ্টে এই কথাগুলি আবও স্পষ্টরূপে বঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। দেখা যাইতেছে,

$$১+২=৩, \text{ এবং } ৩ \text{ একটি মৌলিক সংখ্যা।}$$

$$২+৩=৫, \quad ৫$$

$$৩+৪=৭, \quad ৭$$

কিন্তু এই তিনটি বিশেষ দৃষ্টান্ত হইতে যদি অনুমান করা যায় যে, সংখ্যা-শ্রেণির যে কোন দুটি পরস্পর সংখ্যার যোগকল মৌলিক সংখ্যা, সে অনুমান ভ্রান্ত, এবং সে ভ্রম উপরের তিনটির পর চতুর্থ দৃষ্টান্তেই প্রকাশ পাইবে—

কারণ $৪+৫=৯$, এবং ৯ মৌলিক সংখ্যা নহে,

$$৯=৩ \times ৩।$$

(২) উদাহরণ। ভাগ ক্রিয়া দ্বারা দেখা যাইতেছে

$$\frac{a^n - s^n}{a - s} = a^{n-1} + s \times \frac{a^{n-1} - s^{n-1}}{a - s} \quad \text{—।}$$

- অতএব যদি $(a^{n-1} - s^{n-1})$ রাশি $(a-s)$ দ্বারা বিভাজ্য হয়
তাহা হইলে $(a^n - s^n)$ অবশ্যই $(a-s)$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

কিন্তু $(a-s)$ এই রাশি $(a-s)$ দ্বারা বিভাজ্য।

এবং ভাগক্রিয়াদ্বারা দেখা যায়,

$$\cdot (a^2 - s^2) \text{ এই রাশি } (a-s) \text{ দ্বারা বিভাজ্য।}$$

অতএব $(a^3 - s^3)$ এই

$$\cdot (a^3 - s^3)$$

টত্যাদি

ইত্যাদি।

সুতরাং সাধাবশতঃ

$$a^n - s^n$$

$(a-s)$ দ্বারা বিভাজ্য।

১৭৭। এক্ষণে $(s+a)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণের
নিয়ম নিরূপণ করা যাউক।

গুণনদ্বারা দেখা যায়—

$$\begin{aligned} (s+a_1)(s+a_2) &= s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1a_2, \\ (s+a_1)(s+a_2)(s+a_3) &= s^3 + (a_1 + a_2 + a_3)s^2 \\ &\quad + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)s + a_1a_2a_3, \\ (s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)(s+a_4) &= s^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)s^3 \\ &\quad + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)s^2 \\ &\quad + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)s \\ &\quad + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

এই কয়েকটি দৃষ্টান্তে দেখা যাইতেছে, নিম্নলিখিত নিয়মত্রয় খাটে—

(১) দক্ষিণের রাশিমালার পদসংখ্যা বামের উৎপাদক সংখ্যা অপেক্ষা
এক অধিক।

(২) স'ব শক্তিচিহ্ন প্রথম পদে উৎপাদক সংখ্যার সমান, এবং তাহার
পব প্রত্যেক পদে এক এক কম।

(৩) প্রথম পদের প্রকৃতি এক, দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের যোগফল, তৃতীয় পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি, চতুর্থ পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের তিন তিনটির গুণফলের সমষ্টি । এবং শেষ পদটি উৎপাদকসমূহের সমস্ত দ্বিতীয় পদের গুণফল ।

এখন এই নিয়মগুলি যে সামান্যতঃ খাটে তাহা প্রতিপন্ন করিতে হইবে ।

মনে কর এটি নিয়মগুলি $(n-1)$ সংখ্যক দ্বিপদ উৎপাদকের গুণফলে খাটে, অর্থাৎ মনে কব

$$(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3) \dots (s+a_{n-1}) \\ = s^{n-1} + p_1 s^{n-2} + p_2 s^{n-3} + p_3 s^{n-4} + \dots + p_{n-1} \quad (1)$$

যথায়

$p_1 = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ এর সমষ্টি,

$p_2 = a_1, a_2, a_3$ প্রভৃতির দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি,

$p_3 =$ তিন তিনটির ,

$p_{n-1} =$ সমস্তের গুণফল ।

উপরের (১) এর উভয় পক্ষকে আব একটী দ্বিপদ উৎপাদক $(s+a_n)$ দ্বারা গুণ কর ।

তাহা হইলে

$$(s+a_1)(s+a_2) \dots (s+a_{n-1})(s+a_n) \\ = s^n + (p_1 + a_n) s^{n-1} + (p_2 + p_1 a_n) s^{n-2} \\ + (p_3 + p_2 a_n) s^{n-3} + \dots + p_{n-1} a_n$$

এবং $(p_1 + a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ইহাদের সমষ্টি,

$(p_2 + p_1, a_n) =$ দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি,

$(p_3 + p_2, a_n) =$ তিন তিনটির ,

$p_n - 1, a_n =$ সমস্তের গুণফল।

অতএব যদি উক্ত নিয়মগুলি $(n-1)$ সংখ্যক উৎপাদক স্থলে খাটে, তাহা হইলে তাহার ন সংখ্যক উৎপাদক স্থলেও খাটিবে।

কিন্তু ঐ নিয়মগুলি দুটি, তিনটি, ও চারিটি উৎপাদক স্থলে খাটে তাহা পূর্বে দেখা গিয়াছে।

সুতরাং সেই নিয়মগুলি পাঁচটি উৎপাদক স্থলেও খাটিবে, এবং তাহা চল্লিশটি উৎপাদকস্থলে খাটিবে। ইত্যাদি।

অতএব সেই নিয়মগুলি সাধাবণতঃ সর্বত্র খাটে।

এখন মনে কব

$$(s + a_1)(s + a_2) \dots (s + a_n)$$

$$= s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + \dots + k_{n-1} s + k_n \quad (১)$$

তাহা হইলে

k_1 এবং পরসংখ্যা $= a_1, a_2, \dots$ প্রভৃতির সংখ্যা $= n$,

$$k_2 = a_1, a_2 \text{ প্রভৃতির দুই দুই লইয়া সংযোগ সংখ্যা} \\ = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$k_3 =$ তিন তিন

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

ইত্যাদি

ইত্যাদি

ইত্যাদি।

আব যদি $অ_১ = অ_২ = অ_৩ = \dots = অ_n = অ চব,$

তাহা হইলে $ক_১ = নঅ,$

$$ক_২ = \frac{n(n-1)}{১ \cdot ২} অ^২,$$

$$ক_৩ = \frac{n(n-1)(n-2)}{১ \cdot ২ \cdot ৩} অ^৩,$$

$$ক_n = অ^n,$$

এবং (২) এব বাম পক্ষ $= (স + অ)^n$ ।

অতএব (২) এই আকার ধারণ করিবে—

$$(স + অ)^n = স^n + নঅস^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{১ \cdot ২} অ^২ স^{n-2} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{১ \cdot ২ \cdot ৩} \frac{(n-৩+১)}{৩} অ^৩ স^{n-৩} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{১ \cdot ২} অ^{n-2} স + নঅ^{n-1} স + অ^n । (৩)$$

এই (৩) সাম্যকে নিম্নের আকারেও প্রকাশ করা যায়

$$(স + অ)^n = স^n + নঅস^{n-1} + \frac{n(n-1)}{১ \cdot ২} অ^২ স^{n-2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{১ \cdot ২ \cdot ৩} অ^৩ স^{n-3} + \dots + নঅ^{n-1} স + অ^n । (৪)$$

এখানে মনে রাখা আবশ্যিক স ও অ সম্পূর্ণ বিভিন্ন বস্তু । স একটি বাশি, এবং অ একটি সাঙ্কেতিক চিহ্ন । স'র কোন মূল্য নাই, $নস$, $নস^২$ ইত্যাদি ন সংখ্যক বস্তুর একটি ছুটি উত্যাাদি লইয়া যত যতগুলি সংযোগ হয় তাহারই সংখ্যাবাচক চিহ্ন ।

উপরের (৩) ও (৪) সাম্যে সকল পদই সমশক্তি, অর্থাৎ স'ব ও অ'ব শক্তিচিহ্নের যোগফল সকল পদেই সমান এবং $= ন$ ।

১৭৮। উপরের $(স+অ)^n$ দ্বিপদের শক্তি প্রসারণে $(স+১)$ তম পদ

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{১২৩ \dots r} অ^r স^{n-r}$$

$$= \frac{[n]}{[r]} \frac{অ^r স^{n-r}}{[n-r]}$$

১৭৯। উপরের ১৭৭ ধারাব (৩) সাম্যে স'ব স্থানে ১ ও অ'র পরিবর্তে স লিখিলে ঐ সাম্য এই আকার ধারণ করিবে—

$$(১+স)^n = ১ + ns + \frac{n(n-1)}{১-২} স^২ + \frac{n(n-1)(n-2)}{১-২-৩} স^৩ + \dots + স^n \quad (৫)$$

$$= ১ + {}^nস_১স + {}^nস_২স^২ + {}^nস_৩স^৩ + \dots + স^n \quad (৬)$$

আবার (৬) সাম্যে স'ব স্থানে -স লিখিলে

$$(১-স)^n = ১ - {}^nস_১স + {}^nস_২স^২ - {}^nস_৩স^৩ + \dots \pm স^n \quad (৭)$$

উপরের (৭) সাম্যে n যুগ্ম বাশি হইলে স^n ধনবাশি

ও n অযুগ্ম স^n ঋণবাশি হইবে।

১৮০। উপরের ১৭৯ ধারাব (৬) সাম্যে স=১ লিখিলে

$$১^n = ১ + {}^nস_১ + {}^nস_২ + {}^nস_৩ + \dots + {}^nস_n,$$

$$১^n - ১ = {}^nস_১ + {}^nস_২ + {}^nস_৩ + \dots + {}^nস_n।$$

(১৭২ ধাবাতেও এই সাম্য পাওয়া গিয়াছে)।

১৮১। উপরের ১৭৯ ধারাব (৭) সাম্যে স=-১ লিখিলে,

$$০ = ১ - {}^nস_১ + {}^nস_২ - {}^nস_৩ + \dots$$

∴ ১ = অযুগ্ম পদের প্রকৃতি সমষ্টি—যুগ্ম পদের প্রকৃত সমষ্টি।

এই সাম্য হইতে দেখা বাইতেছে n সংখ্যক বস্তুর মধ্য হইতে অযুগ্ম সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সংযোগ হয় তাহাব সংখ্যা, যুগ্ম-সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সংযোগ হয় তাহাব সংখ্যা অর্থাৎ এক অধিক।

১৮২। যে কোন দ্বিপদ $(a+s)^n$ এর শক্তিপ্রসারণ, $(1+s)^n$ এর শক্তিপ্রসারণের আকার জানা থাকিলেই, অনায়াসে জানা যায়।

$$\text{কারণ, } (a+s)^n = a^n \left(1 + \frac{s}{a}\right)^n।$$

১৮৩। এতক্ষণ $(1+s)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ এই অনুমানে নিরূপণ করা যাইতেছিল যে, শক্তিসূচক সংখ্যা n একটি অখণ্ড ধনবাশি। কিন্তু শক্তিসূচক খণ্ডবাশি এবং ঋণবাশিও হইতে পারে (৭৮-৮০ দ্বারা প্রদ্রব্য), এবং তাহা হইলে $(1+s)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হইবে তাহা এক্ষণে আলোচ্য।

১৮৪। প্রথমতঃ শক্তিচিহ্ন n অখণ্ড ধনবাস্তব হইলে

$(1+s)^n$ এর শক্তিপ্রসারণ নিরূপণ করা যাউক।

যদি n ও m অখণ্ড ধনবাশি হয়, তাহা হইলে

$$(1+s)^n = 1 + ns + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots \quad (১)$$

$$(1+s)^m = 1 + ms + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots \quad (২)$$

$$\text{কিন্তু } (1+s)^n \times (1+s)^m = (1+s)^{n+m}।$$

অতএব (১) ও (২) শ্রেণীর গুণফল অবশ্যই - $(1+s)^{n+m}$,

$$\text{অর্থাৎ } \left(1 + ns + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots\right)$$

$$\times \left(1 + ms + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots\right)$$

$$= 1 + (n+m)s + \frac{(n+m)(n+m-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{(n+m)(n+m-1)(n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots \quad (৩)$$

উপরের (৩) সাম্য এই অনুমানে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, n ও m উভয়ই

অথগু ধনবাশি। কিন্তু ন ও ম অথবা অথগু, অথ বা ধন, যে প্রকারের বাশিই হউক না কেন, (৩) সাম্যের বামেব শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলের আকারের কোন পরিবর্তন হইবে না, তাহা (৩) সাম্যের দক্ষিণের শ্রেণীর আকারেই থাকিবে। এই কথাব সত্যতা জন্মগত করিবাব নিমিত্ত, শিক্ষার্থী (৩) সাম্যের বামেব শ্রেণীদ্বয়ের দুইটাটি পদের গুণফল গুণন দ্বারা নিরূপণ করিয়া দেখিতে পাবেন, এবং তাহাতে তিনি দেখিবেন, সেই গুণফলে—

$$\begin{aligned} \text{প্রথম পদ} &= ১ = (৩) \text{ সাম্যের দক্ষিণের শ্রেণীর } ১\text{ম পদ,} \\ \text{দ্বিতীয় পদ} &- (n+m)s = \text{২য় পদ,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{তৃতীয় পদ} &= \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + nm \right) s^2 \\ &= \frac{n^2 - n + m^2 - m + 2nm}{1 \cdot 2} s^2 \\ &= \frac{(n+m)(n+m-1)}{1 \cdot 2} s^2 = \text{৩য় পদ,} \end{aligned}$$

ঈতাদি ইত্যাদি ইত্যাদি।

অর্থাৎ ঐ গুণফলের পদগুলি (৩) সাম্যের দক্ষিণের শ্রেণীর পদগুলিব সহিত তুল্য।

উপরের ঐ কথাটির প্রতি বিশেষ মনোনিবেশ আবশ্যক।

অতএব ন ও ম যে প্রকারেব বাশিই হউক, (৩) সাম্য ঠিক থাকিবে।

এখন মনে কর (৩) সাম্যের বামেব প্রথম শ্রেণী,
যাহা ন'ব কতকগুলি প্রয়োগ ক্রিয়াব ফল,
ফ (ন) এই চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা বাইবে।

এস্থলে ইহা মনে রাখিতে হইবে যে ফ (ন) এর ফ কোন রাশি নহে, এবং ফ (ন) = (ফ × ন) নহে। ফ কেবল একটি সাঙ্কেতিক চিহ্ন, এবং ফ (ন)'ব অর্থ ন বাশির প্রয়োগ বিশেষের ফল।

এই অর্থে লইলে, যেমন

$$\text{ফ}(n) = 1 + n s + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots$$

তেমনই

$$\text{ফ}(m) = 1 + m s + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots$$

$$\text{ফ}(n+m) = 1 + (n+m)s + \frac{(n+m)(n+m-1)}{1 \cdot 2} s^2 +$$

ইত্যাদি

ইত্যাদি ।

$$\text{এবং ফ}(n+m) = \text{ফ}(n) \times \text{ফ}(m),$$

(৪)

$$\text{ফ}(n+m+v) = \text{ফ}(n) \times \text{ফ}(m) \times \text{ফ}(v),$$

ইত্যাদি

ইত্যাদি ।

এখানে n, m, v প্রভৃতি যে কোন প্রকারেব রাশি হইতে পারে ।

এখন মনে কর $n = m = v = \frac{r}{l}$, যথায় r ও l অখণ্ড ধনবাসি । এবং

মনে কর n, m, v প্রভৃতির সংখ্যা l । তাহা হইলে

$$\begin{aligned} & \text{ফ} \left(\frac{r}{l} + \frac{r}{l} + \frac{r}{l} + \dots \text{ } l \text{ সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত} \right) \\ &= \text{ফ} \left(\frac{r}{l} \right) \times \text{ফ} \left(\frac{r}{l} \right) \times \text{ফ} \left(\frac{r}{l} \right) \times \dots \text{ } l \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত,} \end{aligned}$$

অর্থাৎ

$$\text{ফ}(r) = \left\{ \text{ফ} \left(\frac{r}{l} \right) \right\}^l$$

∴ উভয় দিকের l তম মূল লইলে,

$$\left\{ \text{ফ}(r) \right\}^{\frac{1}{l}} = \text{ফ} \left(\frac{r}{l} \right) \quad (৫)$$

পূর্বে বলা হইয়াছে $\text{ফ}(n)$ যে শ্রেণীক সঙ্কেতিক চিহ্ন তাহাতে n যে কোন প্রকারের রাশি হইতে পারে ।

যদি $n = \frac{r}{l}$ হয়, তাহা হইলে

$$\text{ফ}\left(\frac{r}{l}\right) = 1 + \frac{r}{l} s + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{r(r-1)\left(\frac{r}{l}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots$$

এবং ফ (ব) এই সাঙ্কেতিক চিহ্নে ব অঙ্ক গুণনরাশি হইলে

$$\begin{aligned} \text{ফ (ব)} &= (1+s)^{\frac{r}{l}}, \\ \{\text{ফ (ব)}\}^l &= (1+s)^r. \end{aligned}$$

অতএব (৫) সাম্য এই আকার ধারণ করিবে, যথা—

$$(1+s)^{\frac{r}{l}} = 1 + \frac{r}{l} s + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} s^2 + \frac{r(r-1)\left(\frac{r}{l}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^3 + \dots \quad (৬)$$

সুতরাং $(1+s)^{\frac{r}{l}}$ এই দ্বিপদের শক্তিচিহ্ন ন যদি বঙ্ক গুণনরাশি হয়, অর্থাৎ যদি $n = \frac{r}{l}$ হয়, তাহা হইলেও শক্তিপ্রসারণে যে বাশিমালা বা শ্রেণী পাওয়া যায়, তাহাও $(1+s)^{\frac{r}{l}}$ দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে লঙ্ক ১৭৯ ধারাব (৫) সাম্যের শ্রেণীর জায়, কেবল ন'ব স্থলে $\frac{r}{l}$ থাকিবে।

শক্তিচিহ্ন গুণনরাশি হইলে দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হয় দেখা গেবে।

১৮৫। এখন দ্বিতীয়তঃ শক্তিচিহ্ন অঙ্ক গুণনরাশি হইলে দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হইবে দেখা যাউক।

উপরের ১৮৪ ধারাব (৪) সাম্যে মনে কব

ম- -ন।

$$\text{তাহা হইলে } ফ(n) \times ফ(-n) = ফ(n-n) = ফ(0) \\ = 1,$$

কারণ $n=0$ হইলে, $ফ(n) = 1 + 0 + 0 + \dots$ হইবে।

$$\text{অতএব } ফ(n) = ফ(-n)।$$

কিন্তু পূর্বে (১৮৪ ধারায়) সপ্রমাণ করা হইয়াছে, n অখণ্ড বা খণ্ড যে কোন প্রকারের ধনরাশি হইলে $ফ(n) = (1+s)^n$ ।

$$\text{অতএব } \frac{1}{ফ(n)} = \frac{1}{(1+s)^n} = (1+s)^{-n} \text{ (৭২ ধারা দ্রষ্টব্য।)}$$

$$\therefore (1+s)^{-n} = ফ(-n) \\ = 1 + (-n)s + \frac{(-n)(-n-1)}{2} s^2 \\ + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3} s^3 + \dots \quad (৭)$$

অতএব দেখা যাইতেছে শক্তিচিহ্ন n যে কোন ঋণবাশি হইলে, $(1+s)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে যে শ্রেণী পাওয়া যায়, তাহা $(1+s)^n$ দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে লক্ষ ১৭২ ধারাব (৫) সামোব শ্রেণীর জ্ঞাব, কেবল n ব স্থানে $(-n)$ থাকিবে।

১৮৬। শক্তিচিহ্ন n খণ্ড বাশি বা ঋণবাশি হইলে $(1+s)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণের প্রক্রিয়া যে প্রণালীতে সপ্রমাণ করা হইল, তাহা সম্পূর্ণ সন্তোষজনক বলিয়া মনে না লাগিতে পারে। এবং কোন কোন স্থলে শক্তিপ্রসারণ লক্ষ শ্রেণীর অর্থ বিচিত্র বলিয়া মনে হইবে। বধা,

$$\left\{ 1 + (-s) \right\}^{-2} = 1 + (-2)(-s) + \frac{(-2)(-2-1)}{2} (-s)^2 \\ + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3} (-s)^3 + \dots \\ = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

এখন মনে কর $s=2$, তাহা হইলে

$$(-1)^{-2} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

ইহা অতি বিচিত্র।

তবে ইহার অর্থ এই রূপে কবা যাইতে পারে।

$$\{1 + (-s)\}^{-1} = \frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \frac{s^4}{1-s},$$

যদি ভাগ করিয়া ভাগফল এবং ভাগশেষ লিখিত হয়।

এবং তাহা হইলে যদি $s=2$ হয়,

$$(-1)^{-2} = 1 + 2 + 8 + 8 + \frac{16}{-1} = 14 - 16,$$

অর্থাৎ $-1 = -1$ ।

আর ইহাতে কোন অসঙ্গতি দোষ বা বিচিত্রতা নাই।

অতএব উপরে $(1+s)^n$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণকে প্রোটর সহিত উক্ত দ্বিপদের যে সমতা দেখান হইয়াছে, সেই সমতা, শক্তিচিহ্ন অথবা ধনরাশি হইলেই, প্রকৃত মূল্যের সমতা বলিয়া গৃহীত হইবে। এবং শক্তিচিহ্ন ঋণবাশি বা ঋণবাশি হইলে, সে সাম্য বস্তুতঃ মূল্যের সমতা সর্জন হইবে না, তাহা দৃশ্যতঃ আকারের সমতা মাত্র হইবে। তবে অনেকস্থলে (যথা উপরে উদাহরণে ভাগশেষ লইয়া) সেই সাম্যের বাথার্থ্য দেখান যাইতে পারে।

১৮৭। শক্তিচিহ্ন ঋণ বা ঋণরাশি হইলে, $(1+s)^n$ এর শক্তিপ্রসারণে $(s+1)$ তম পদের আকার কোনকোন স্থলে সরল করা যাইতে পারে। যথা,

$$\begin{aligned} (1) \quad & (1+s)^{-n} \text{ এর } (r+1) \text{ তম পদ} \\ &= \frac{-n(-n-1)(-n-2) \dots (-n-r+1)s^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)(-1)^r s^r}{r!} \end{aligned}$$

(২) $\{1+(-s)\}^{-n}$ এর $(r+1)$ তম পদ

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)(-1)^r (-s)^r}{r!} \\ = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{r!} s^r,$$

(৩) $(1+s)^{-2}$ এর $(r+1)$ তম পদ

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2+r-1)(-1)^{r+1} s^r}{r!} \\ = (r+1)(-1)^{r+1} s^r.$$

(৪) $(1-s)^{-2}$ এর $(r+1)$ তম পদ

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2+r-1)(-1)^r (-s)^r}{r!} \\ = (r+1) s^r.$$

(৫) $(1+s)^2$ এর $(r+1)$ তম পদ ($r = r_1 > 2$)

$$= \frac{2(2-1)(2-2) \dots (2-r+1)}{r!} s^r \\ = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \dots (2-r-1)(-1)^{r-1} s^{r-1}}{r!}.$$

১১। উদাহরণমালা ।

- ১। (১) $(২s^২ - ৩t^২)^{২০}$ ইহার শক্তি প্রসারণে ১৯এব পদ লিখ।
 (২) $(x + s)^২$ এর মধ্য পদটির লিখ।
 (৩) $(৪s - ৩t)^{১০}$ ইহার দ্বিতম পদ লিখ।
 (৪) $(s - \frac{১}{s})^{৩১}$ ইহার প্রথম হইতে $(২n + ১)$ তম পদ লিখ।

(৫) $(১ + s)^{২n}$ এর শক্তিপ্রসারণে s^n এর প্রকৃতি
 $(১ + s)^{২n - ১}$ এব শক্তি প্রসারণে s^n এব প্রকৃতির বিশ্লেষণ,
 ইহা সপ্রমাণ কর।

- ২। (১) $\frac{১}{(২ - ৩s^২)^{৫}}$ ইহার শক্তি প্রসারণে প্রথম পদ চতুর্থটির লিখ।

(২) $(১ - s)^{-\frac{p}{q}}$ ইহার শক্তি প্রসারণে সকল পদই ধন বাশি, ইহা
 সপ্রমাণ কর।

(৩) $(১ - s)^{-n}$ এর শক্তি প্রসারণে n তম পদের প্রকৃতি $(n - ১)$ তম
 পদের প্রকৃতির বিশ্লেষণ, ইহা সপ্রমাণ কর।

(৪) $(১ - ২s)^{-৫}$ ইহার শক্তি প্রসারণের $(৩ + ১)$ তম পদ লিখ।

(৫) যদি p এবং q , $(১ - s)^{-\frac{p}{q}}$ এর এবং $(১ - s)^{-\frac{p}{q}}$ এর শক্তি
 প্রসারণের n তম পদ হয়, তাহা হইলে $q = (২n - ১)$ p , ইহা সপ্রমাণ কর।

দ্বাদশ অধ্যায় ।

লগ সংখ্যা ।

১৮৮। যদি $n = a^s$ হয়, তাহা হইলে
 স'কে ন'র অ ভিত্তি মূলক লগসংখ্যা বলা যাইবে। এবং ঐ
 কথাটি এই রূপে লিখিত হইবে,
 যথা, $s = \text{লগ}_a n$ ।

অতএব যদি $n = a^s$,
 তাহা হইলে $s = \text{লগ}_a n$,
 এবং $n = a^{\text{লগ}_a n}$ ।

লগ সংখ্যা করনা দ্বারা গণিতের উচ্চতর তত্ত্বের গবেষণায় সহায়তা
 হইরাছে, শিক্ষার্থী তাহা উচ্চতর গণিত পাঠে জানিতে পারিবেন।

এবং লগ সংখ্যা প্রয়োগ দ্বারা অনেক স্থলে সান্নাধ্য গণনার সুবিধা
 হইরাছে, শিক্ষার্থী তাহা এই অধ্যায় পাঠে দেখিতে পাইবেন।

১৮৯। যখন $a^1 = 1$,
 তখন $\text{লগ}_a 1 = 0$ । (১)

এবং যখন $a^a = a$
 তখন $\text{লগ}_a a = 1$ । (২)

আবার যখন $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$,
 তখন $\text{লগ}_a 0 = -\infty$ (৩)

অর্থাৎ ১ এর লগ $= 0$,
 ভিত্তির লগ $= 1$,
 ০ এর লগ $= -\infty$ ।

১৯০। যদি $n = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

তাহা হইলে $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

এবং $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 1$,

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$ (১)

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{a}{b}}$ (২)

১৯১। যদি $n = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$,

তাহা হইলে $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$
 $= \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$,

এবং $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} - \frac{a}{b}$,

$\therefore \frac{a}{b} (n) = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$ (১)

$$\begin{aligned} \text{লগ}_{\text{অ}}\left(\frac{n}{m}\right) &= s - v \\ &= \text{লগ}_{\text{অ}} n - \text{লগ}_{\text{অ}} m \end{aligned} \quad (২)$$

অর্থাৎ

গুণকলের লগ = গুণ্যের লগ + গুণকের লগ ,

ভাগফলের লগ = ভাজ্যের লগ - ভাজকের লগ ।

$$১৯২। \text{ যদি } n = \text{অ}^s,$$

$$\begin{aligned} \text{তাহা হইলে } n^m &= (\text{অ}^s)^m \\ &= \text{অ}^{sm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{লগ}_{\text{অ}} n^m &= sm \\ &= m \times \text{লগ}_{\text{অ}} n \end{aligned} \quad (৩)$$

এ স্থলে m অথবা অথবা রাশি গুণ বা ধনরাশি হইতে পারে ।

$$\text{যদি } m = \text{অথবা রাশি ব হয়,}$$

$$\text{লগ}_{\text{অ}} n^m = b \times \text{লগ}_{\text{অ}} n \quad (৪)$$

$$\text{যদি } m = \frac{1}{r} \text{ হয়,}$$

$$\text{লগ}_{\text{অ}} n^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \times \text{লগ}_{\text{অ}} n \quad (৫)$$

অর্থাৎ

কোন সংখ্যার শক্তির লগ = শক্তিচিহ্ন × সংখ্যার লগ,

কোন সংখ্যার মূলের লগ = $\frac{1}{\text{শক্তিচিহ্ন}}$ × সংখ্যার লগ,

• এবং সামাজিকতা:

কোন সংখ্যার শক্তিব লগ = শক্তিচিহ্ন \times সংখ্যার লগ ।

১২৩। উপরে ১২১ ও ১২২ ধারার বাহা প্রতিপন্ন হইল, তাহাতে দেখা যাইতেছে, লগ সংখ্যার সাহায্যে, সংখ্যার কষ্টসাধ্য গুণন ও ভাগক্রিয়ার ফল, তাহাদের লগ সংখ্যার অপেক্ষাকৃত সুখসাধ্য বোগ ও বিরোগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যাইতে পারে, এবং সংখ্যার কষ্টসাধ্য ও অনেক স্থলে অসাধ্য শক্তি-প্রসারণ ও মূল্যাকর্ষণ ক্রিয়ার ফল, তাহাদের লগ সংখ্যার অপেক্ষাকৃত সুখসাধ্য গুণন ও ভাগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যাইতে পারে।

অর্থাৎ, যদি কোন একটি ভিত্তি অবলম্বন করিয়া, ১ হইতে ১০০০০ পর্যন্ত সকল রাশির লগ সংখ্যা গণনা কবিয়া (কিরূপে সে গণনা হইবে তাহা পবে দেখান যাইবে) তাহার তালিকা প্রস্তুত কবিয়া রাখা যায়, তাহা হইলে ১০০০০০এব নূন যে কোন রাশির লগ সংখ্যা সেই তালিকা হইতে পাওয়া যাইবে, এবং তদ্বারা ১২১ ও ১২২ ধারার নিয়মানুসারে ১০০০০০এর নূন কোন দুই রাশির গুণফলের ও ভাগফলের, এবং কোন এক রাশির শক্তির, লগ সংখ্যা জানা যাইবে। আর সেই ভাগফলের, ও সেই গুণফল বা শক্তি যদি ১০০০০০এব অধিক হয় তাহা হইলে তাহার, লগ সংখ্যা হইতে উক্ত তালিকার সাহায্যে ইষ্টরাশি জানা যাইবে।

এখন দেখা আবশ্যক কোন্ রাশি লগ সংখ্যার ভিত্তি বলিয়া গৃহীত হইবে, এবং কিরূপে রাশিপ্রণতির লগ সংখ্যা নিরূপিত হইবে।

১২৪। সচবাচব দুইটি রাশি লগ সংখ্যার ভিত্তি বলিয়া গৃহীত হইয়া থাকে।

একটি রাশি

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} + \dots \text{ এই অসীম শ্রেণী,}$$

অপরটি ১০।

প্রথমটি গবেষণা কার্যে, এবং দ্বিতীয়টি গণনা কার্যে, সুবিধা জনক বলিয়া ব্যবহৃত হইয়া থাকে। কেন তাহারা ঐ ঐ কার্যে সুবিধা জনক, তাহা নিম্নে ক্রমশঃ দেখা যাইবে।

১২৫। উপরের লিখিত অসীম শ্রেণী, ই, এই অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$\text{অতএব ই} = ১ + \frac{১}{১} + \frac{১}{২} + \frac{১}{৩} + \dots \quad (১)$$

ই'র মূল্য > ২ , স্পষ্টই দেখা বাইতেছে। এবং ই'র মূল্য < ৩ ,

$$\text{কারণ, } \frac{১}{২} + \frac{১}{৩} + \frac{১}{৪} + \dots < \frac{১}{২} + \frac{১}{২} + \frac{১}{২} + \dots \\ < \frac{৩}{১} < ৩,$$

কেন না, $\frac{১}{১.২} = \frac{১}{২}$, কিন্তু $\frac{১}{১.২.৩} < \frac{১}{২.২}$, $\frac{১}{১.২.৩.৪} < \frac{১}{২.৩}$, ইত্যাদি।

এবং ই'র মূল্য কোন সসীম রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।

যদি আর, মনে কর ই $= \frac{n}{m}$ । তাহা হইলে

$$\frac{n}{m} = ১ + \frac{১}{২} + \frac{১}{৩} + \dots$$

∴ $\lfloor m \rfloor$ দিরা গুণ করিলে

$$n \lfloor m-১ \rfloor = ১ + \text{অখণ্ড রাশি} + \frac{১}{m+১} + \frac{১}{(m+১)(m+২)} + \dots$$

$$\text{কিন্তু } \frac{১}{m+১} + \frac{১}{(m+১)(m+২)} + \dots < ১,$$

$$\text{কারণ, এই শ্রেণী } > \frac{১}{m+১},$$

$$\text{এবং } < \frac{১}{m+১} + \frac{১}{(m+১)^২} + \frac{১}{(m+১)^৩} + \dots$$

$$< \frac{\frac{১}{m+১}}{১ - \frac{১}{m+১}} < \frac{১}{m}।$$

অতএব ন | ১-১, এই অখণ্ড বাশি

= একটি অখণ্ড বাশি + একটি ভগ্নাংশ,

কিন্তু তাহা কখনই হইতে পারে না ।

সুতরাং এই অসীম শ্রেণী অসম্ভাব্য অপবিমের ।

তবে (১) শ্রেণীর যত অধিক সংখ্যক পদ লওয়া যাইবে, ততই তাহাৰ গৃহীত মূল্য তাহার প্রকৃত মূল্যের সন্নিকটস্থ হইবে । সচরাচর

ই = ২.৭১৮২৮১৮২ ধৰা যায় ।

১৯৬ । এখন লগ সংখ্যার ভিত্তি ১০ লইলে গণনার কিরূপ সুবিধা হয়, তাহা দেখা যাউক ।

সৰ্ব্বাগ্রে এই কথা বলা বহিল যে, ১০ ভিত্তিমূলক লগসংখ্যার যেখানে প্রয়োগ হইবে, সেখানে লগ শব্দের নিম্নে দক্ষিণে ভিত্তির অঙ্ক লিখিত থাকিবে না,

এবং লগ, n = ক ইহার পরিবর্তে

লগ n = ক ইহাই লিখিত হইবে ।

দেখা যাইতেছে,

$১০ = ১০^১$, \therefore লগ $১০ = ১$,

$১০০ = ১০^২$, \therefore লগ $১০০ = ২$,

$১০০০ = ১০^৩$, \therefore লগ $১০০০ = ৩$,

এবং সামান্যতঃ লগ $১০^p = p$ ।

এবং ১ হইতে ৯ পর্যন্ত বাশির লগ = কোন ভগ্নাংশ,

১০ ২২ . = ১ + ভগ্নাংশ,

১০০ ২২২ .. = ২ + ভগ্নাংশ,

১০^p . $(১০^p + ১ - ১)$ = p + ভগ্নাংশ ।

অতএব ১, ১০, ১০০, ১০০০ প্রভৃতি ভিন্ন জনা রাশির লগ সংখ্যার এক ভাগ অখণ্ড সংখ্যা ও আর এক ভাগ ভগ্নাংশ। এবং প্রচলিত দশমিক প্রণালীতে অঙ্কদ্বারা লিখিত যে কোন রাশির লগ সংখ্যার অখণ্ড ভাগ সেই রাশি দৃষ্টান্ত বলা যায়, ও তাহা সেই রাশির অখণ্ড ভাগের অঙ্ক সংখ্যার এক কম।

এই কথা মনে রাখিলে, ১০ ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যার তালিকাতে তাহার অখণ্ড ভাগ লিখিত হইবার প্রয়োজন হয় না, এবং ঐরূপ তালিকার প্রত্যেক রাশির লগ সংখ্যার কেবল ভগ্নাংশ ভাগ দশমিক প্রণালীতে লিখিত থাকে।

আবও দেখা যাইতেছে

$$\begin{aligned}\text{লগ}(n \times 10^p) &= \text{লগ } n + \text{লগ } 10^p \\ &= \text{লগ } n + p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{লগ}(n \div 10^f) &= \text{লগ } n - \text{লগ } 10^f \\ &= \text{লগ } n - f.\end{aligned}$$

অতএব যদি কোন রাশি ন কে দশেব কোন শক্তিদ্বারা গুণিত বা বিভক্ত করা হয়, সেই গুণফলের বা ভাগফলের লগ সংখ্যার খণ্ডভাগ পরিবর্তিত হয় না, পূর্বরাশি ন এর লগ সংখ্যার খণ্ডভাগের সহিত সমান থাকে, কেবল লগ সংখ্যার অখণ্ডভাগ দশের সেই শক্তিচিহ্ন পরিমাণে বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়। এবং সেই হ্রাসের জন্য সেই অখণ্ডভাগ কখন কখন ঋণরাশি হইতে পারে। কিন্তু সেক্ষেপ স্থলে মনে রাখিতে হইবে যে, লগ সংখ্যার খণ্ডভাগ ধনরাশিই থাকে, কেবল অখণ্ডভাগ ঋণরাশি হয়, এবং সেক্ষেপ স্থলে ঋণচিহ্ন সমস্ত সংখ্যার বামে না বসিয়া তাহার অখণ্ড ভাগের ঊপরে স্থাপিত হয়। বথা,

$$\text{লগ } 2 = 0.30103,$$

$$\text{লগ } .2 = \bar{1}.30103,$$

$$\text{লগ } .02 = 2\bar{.}30103,$$

$$\text{লগ } .002 = 3\bar{.}30103.$$

সামান্যতঃ

$$\frac{১}{১০.প} \text{ ও } \frac{১}{১০.প+১} \text{ অর্থাৎ } ১০.^{-প} \text{ ও } ১০.^{-(প+১)}$$

এই বাশিষয়ের মধ্যস্থিত যে কোন রাশির লগ সংখ্যার ঋণভাগ ধনরাশি থাকিলে, তাহার অধগু ভাগ $-(প+১)$ হইবে, অর্থাৎ বাশির দশমিক বিন্দুর দক্ষিণের শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক ঋণবাশি হইবে।

১৯৭। এখন লগ সংখ্যাব তালিকা কিরূপে প্রস্তুত করা যাইবে, অর্থাৎ কোন রাশির লগ সংখ্যা কিরূপে নির্ণয় করা যাইতে পারে, তাহা দেখা যাউক। তৎসম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াগুলি একটু জটিল, অতএব যত্নেব সহিত তৎপ্রতি প্রণিধান আবশ্যক।

১৯৮। দ্বিপদ শক্তি প্রসারণের নিয়মানুসারে,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{১}{n}\right)^{ns} &= 1 + ns \frac{১}{n} + \frac{ns(ns-১)}{১ \cdot ২} \cdot \frac{১}{n^2} \\ &\quad + \frac{ns(ns-১)(ns-২)}{১ \cdot ২ \cdot ৩} \cdot \frac{১}{n^3} + \\ &= 1 + s + \frac{s^2}{১ \cdot ২} \left(1 - \frac{১}{ns}\right) + \frac{s^3}{১ \cdot ২ \cdot ৩} \left(1 - \frac{১}{ns}\right) \left(1 - \frac{২}{ns}\right) + \\ &\quad + \frac{s^4}{১ \cdot ২ \cdot ৩ \cdot ৪} \left(1 - \frac{১}{ns}\right) \left(1 - \frac{২}{ns}\right) \left(1 - \frac{৩}{ns}\right) + \dots \end{aligned}$$

এখন মনে কর $n = \infty$, তাহা হইলে

$$\frac{১}{ns} = 0, \frac{২}{ns} = 0, \frac{৩}{ns} = 0, \frac{৪-১}{ns} = 0, \dots$$

এবং n অসীম বৃহৎ হইলে, (১) শ্রেণীর আকার এই হইবে,

$$\left(1 + \frac{১}{n}\right)^{ns} = 1 + s + \frac{s^2}{১ \cdot ২} + \frac{s^3}{১ \cdot ২ \cdot ৩} + \dots \quad (২)$$

আর (২) শ্রেণীতে $s=1$ হইলে,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$= e।$$

$$\text{কিন্তু } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ns},$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots\right)^s$$

$$= 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots,$$

$$\text{অর্থাৎ } e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots \quad (৩)$$

১১৯। মনে কব $a^s = e^s$, তাহা হইলে

$$s \log_e a = s।$$

$$\therefore a^s = e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots$$

$$= 1 + \frac{s}{1} \log_e a + \frac{s^2}{2} (\log_e a)^2 + \frac{s^3}{6} (\log_e a)^3 + \dots \quad (৪)$$

এই শ্রেণীকে শক্তি সূচক শ্রেণী বলা যায়।

১২০। উপরের ১১৯ ধারা মতে,

$$a^s = 1 + \frac{s}{1} \log_e a + \frac{s^2}{2} (\log_e a)^2 + \dots$$

মনে কব $a=1+s$, তাহা হইলে

$$(1+s)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) s^2 + \dots \right\} \quad (1)$$

এবং বিপন্নশক্তি প্রসারণের নিয়মে

$$(1+s)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) s^2 + \dots \quad (2)$$

(১) ও (২) শ্রেণী প্রকৃত পক্ষে একই শ্রেণী, সুতরাং দুই শ্রেণীরই ব প্রকৃতি সমান ।

অতএব

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(1+s) &= s - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{3} s^3 - \frac{1}{4} s^4 + \dots \\ &= s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

এবং স'র স্থানে -s লিখিলে

$$\log_{\frac{1}{2}}(1-s) = -s - \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} - \dots \quad (4)$$

অতএব (৩) শ্রেণী হইতে (৪) শ্রেণী বাদ দিলে

$$\log_{\frac{1}{2}}(1+s) - \log_{\frac{1}{2}}(1-s) = 2 \left(s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \dots \right)$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+s}{1-s} = 2 \left(s + \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} + \dots \right) \quad (5)$$

এখন (৫) শ্রেণীতে স'র স্থানে $\frac{1}{2n+1}$ লিখ। তাহা হইলে

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n} = 2 \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(n+1) - \log_{\frac{1}{2}}n$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\} \dots (6)$$

২০১। উপরের ২০০ ধারাব (৬) শ্রেণীতে $n=1$ লিখিলে

$$\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 - \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 1 = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^4} + \dots \right\} ।$$

$$\therefore \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 - 0 = \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 = 2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^4} + \dots \right\} \\ = 1.386294361 ।$$

এখন উপরের (৬) শ্রেণীতে $n=2$ লিখিলে

$$\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 4 - \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 = 2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \right\}$$

$$\therefore \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 4 = \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 + 2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \right\} \\ = 1.386294361 + 0.88686681 \\ = 2.273161171 ।$$

$$\therefore \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 8 = \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 4 + 2 \times \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2 \\ = 2.273161171 ।$$

এখন ২০০ ধারাব (৬) শ্রেণীতে $n=3$ লিখিলে

$$\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 16 - \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 8 = 2 \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 2^2} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \dots \right\}$$

$$\therefore \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 16 = \text{লগ}_{\frac{1}{2}} 8 + 2 \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 2^2} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \dots \right\} \\ = 2.273161171 + 2 \left\{ \frac{1}{16} + \frac{1}{16 \cdot 2^2} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \dots \right\} \\ = 2.50768769 ।$$

২০২। উপরের ২০০ ধারাব (৬) শ্রেণীতে $n=3$, $n=8$, $n=5$, ইত্যাদি ক্রমশঃ লিখিলে, যেমন $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 3$ নির্ণীত হইয়াছে সেইরূপে, $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 8$, $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 5$, $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 6$, প্রভৃতি সকল রাশিরই ই ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা নির্ণীত হইতে পারে। আর $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 2$ ও $\text{লগ}_{\frac{1}{2}} 3$ পূর্বেই নির্ণীত হইয়াছে। এবং

তাহাদের প্রত্যেককে $\frac{১}{লগ ১০}$ অর্থাৎ $\frac{১}{২.৩০২৫৮৫}$ দিয়া গুণ করিলে [১৯০

ধারার (২) সাম্য স্রষ্টব্য] ২, ৩, ৪, ৫, প্রভৃতি সকল রাশির ১০ ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা নির্ণীত হইতে পারে, এবং তাহাদের তালিকা প্রস্তুত হইতে পারে ।

২০৩। লগ সংখ্যার তালিকা প্রস্তুত কবণার্থে সকল রাশির নিমিত্তই যে শ্রমসাধ্য গণনা কবিত্তে হয় এমন নহে । কতকগুলি রাশির লগ সংখ্যা নির্ণীত হইলে, কোশলে অতি সহজে অনেকগুলি অপর রাশির লগ সংখ্যা নিরূপিত হইতে পারে ।

যথা, যদি লগ ২ = '৩.১০৩,

লগ ৩ = ৪.৭৭১২,

লগ ৭ = ৮.৪৫০৯,

জানা থাকে, তাহা হইলে ১ হইতে ১০ পর্যন্ত সকল রাশিরই লগ সংখ্যা জানা যায় ।

কারণ, লগ ৪ = লগ ২^২ = ২ লগ ২ = ২ × ৩.১০৩

= ৬.২০৬,

• লগ ৫ = লগ $\frac{১০}{২}$ = লগ ১০ - লগ ২ = ১ - '৩.১০৩

= '৬.৮৮৯,

লগ ৬ = লগ (২ × ৩) = লগ ২ + লগ ৩ = '৩.১০৩ + '৪.৭৭১২

= ৭.৭৮১৫,

লগ ৮ = লগ ২^৩ = ৩ × লগ ২ = ৩ × '৩.১০৩

= '৯.৩০৯,

লগ ৯ = লগ ৩^২ = ২ × লগ ৩ = ২ × '৪.৭৭১২

= '৯.৫৪২৪,

লগ ১০ = ১ ।

অতএব ১ হইতে ১০ পর্য্যন্ত রাশির লগ সংখ্যার তালিকা এই—

রাশি	লগ
১	০.০০০০০
২	০.৩০১০৩
৩	০.৪৭৭১২
৪	০.৬০২০৬
৫	০.৬৯৮৯৭
৬	০.৭৭৮১৫
৭	০.৮৪৫০৯
৮	০.৯০৩০৯
৯	০.৯৫৪২৪
১০	১.০০০০০

২০৪। লগ সংখ্যার সাহায্যে অনেক প্রকার প্রশ্ন সমাধান করা যায়।
ভাষ্য হইতে উদাহরণ এখানে দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। $২^{৩৪}$ এটি রাশিতে কতগুলি অঙ্ক আছে?

$$\begin{aligned}\text{লগ } ২^{৩৪} &= ৩৪ \times \text{লগ } ২ \\ &= ৩৪ \times ০.৩০১০৩ \\ &= ১০.২৩৫২২\end{aligned}$$

যখন $২^{৩৪}$ ইহার লগ সংখ্যার অখণ্ড ভাগ ১০ তখন এই রাশিতে ২০টি অঙ্ক আছে।

(২) উদাহরণ। যদি $২^{স-৩} = ৫$, তবে স কত?

(স-৩) লগ ২ = লগ ৫ = লগ $২^১ = ১$ - লগ ২,

$$\therefore \quad স - ৩ = \frac{১}{\text{লগ } ২} - ১,$$

$$\therefore \quad স = ২ + \frac{১}{\text{লগ } ২}।$$

২০৫। উপরের ১৯৮ হইতে ২০২ ধারায় দেখা গেল, ই ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যার সাহায্যে ১০ ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যার তালিকা প্রস্তুত করিতে পারা যায়। অতএব ই ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা গবেষণা কার্যে যে সুবিধাজনক তাহাব একটি দৃষ্টান্ত এখানে পাওয়া গেল।

১২। উদাহরণমালা।

১। (১) লগ ৬২৫, লগ ০০০৬২৫, লগ $\frac{১}{৬২৫}$ নির্ণয় কর। (লগ ২ = ০.১০৩)।

(২) লগ ১৪৪ এর অর্থও ভাগ কত ?

(৩) লগ ২১৬ ও লগ ১০৮০ কত কত ?

(লগ ২ = ০.১০৩, লগ ৩ = ০.৪৭৭১২)।

(৪) লগ $\frac{১}{৬}$ কত ?

(৫) যদি $x^2 - 2x = ৮$, তাহা হইলে x কত ?

২। (১) $\frac{১}{৫} = \frac{২}{১০} + \frac{৪}{২৫} + \frac{৬}{১২৫} +$

ইহা সপ্রমাণ কর।

(২) \sqrt{x} ই কত ?

(৩) $১ + \frac{১+x}{২} + \frac{১+x+x^2}{৩} + \frac{১+x+x^2+x^3}{৪} +$

ইহার মূল্য কত ?

(৪) লগ $\frac{১}{৬} = ১ + \frac{১}{১ \times ২} + \frac{১}{২ \times ২^২} + \frac{১}{৩ \times ২^৩} +$

ইহা সপ্রমাণ কর।

(৫) $\frac{x-১}{x+১} = \left\{ \frac{১}{২} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৬} + \right\} \div$
 $\left\{ \frac{১}{১} + \frac{১}{৩} + \frac{১}{৫} + \right\}$

ইহা সপ্রমাণ কর।

উদ্ভিদশালা ।

૨૧ (૨૧ પ્રશ્ન) ।

- $$\begin{array}{ll} 1. & 6x - 9y^2 \\ 2. & x + y + z \\ 3. & 2x^2 + 6xy^2 - 6y^3 \\ 4. & x - 8y + 8y^2 \\ 5. & x^2 - 2x \end{array}$$

२ । (४१ गुं) ।

- ১। (১) $k^2 + x^2 - g^2 + 3kxg$ ।
 (২) $1 + s^2 - s^2 - s^2$ ।
 (৩) $k^2 + 8x^2 - 29g^2 - 28x^2g + 8x^2g^2 - 29g^2k + 3kg^2 - k^2x - 8kx^2 + 12kxg$ ।
- ২। (১) $3k^2 - kx + x^2$ । (২) $s^2 - s^2 - s^2$ ।
 (৩) $s^2 - s - 12$ ।
- ৩। (১) $k + 3x + 2g$ ।
 (২) $-22k - 8x + 20g$ ।
 (৩) $(k - g + n)s^2 + (x + k - n)s + (g - n + n)$ ।
 (৪) $(k - x) \{ (k + x)s^2 + 2s^2 + s^2 \}$ ।
- ৪। (১) $k^2 - k^2x^2 + x^2$ ।
 (২) $k^2 + k^2x + k^2x^2 + kx^2 + x^2$ ।
 (৩) $k^2 + k^2x + kx^2 + x^2$ ।
 (৪) $k^2 - k^2x + kx^2 - x^2$ ।
- ৫। (১) $(s+1)(s+1)$ । (২) $(8s-5)(3s+8)$ ।
 (৩) $(8s+2)(2s-3)$ । (৪) $(s-5)(s+3)$ ।
 (৫) $(3s+8)(s+5)$ ।
 (৬) $(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)$ ।
 (৭) $(k+8)(k^2 + 2k + 8)$ ।

୩ । (୧୦ ପୃଷ୍ଠା) ।

- ୧ । (୧) $m - 5$ । (୨) $m + 2$ । (୩) $m + ୭$ ।
 (୪) $m - ୧$ । (୫) $m - ୨$ ।
 ୨ । (୧) $(m + ୨)(m^2 + m^3 + ୨m + 8)$ ।
 (୨) $(m^2 - 8)(m^2 + m - ୨)(m^3 - m + ୧)$ ।
 (୩) $(m + ୨)(୨m - ୧)(୩m - ୧)(୫m^2 - ୭m + ୧)$ ।
 (୪) $(m - ୮)^2(୨m^2 - ୧୦୦)(m + ୨)$ ।
 (୫) $(m - ୧)(m - ୨)(m + ୩)(m - ୫)(m - ୬)(m + ୬)$ ।

୪ । (୬୫ ପୃଷ୍ଠା) ।

- (୧) $\frac{୩m^2 + m}{8m^2 + ୨m - ୧}$ । (୨) $\frac{m - ୧}{m + ୧}$ । (୩) $\frac{୨m + ୭}{୧m - ୨}$ ।
 (୪) ୧ । (୫) ୧ । (୬) $\frac{k^2 + ୪x^2}{୨kx}$ ।
 (୭) $\frac{k^2 + ୪x^2}{k}$ । (୮) ୧ । (୯) $\frac{k^2}{x^2} + \frac{x^2}{k^2} - ୧$ ।
 (୧୦) $\frac{kx^୪ + kx^୬}{kx^୪ + ୧x^୬ + x^୮}$ ।

୫ । (୧୫ ପୃଷ୍ଠା) ।

- ୧ । (୧) $k^2 + ୫x^2 + ୩m^2 + ୫kx + ୬kx + ୧୨x^୩$ ।
 (୨) $k^2 + ୫x^2 + ୩m^2 + ୫kx^2 + ୬kx^3 + ୧୨x^3m^2$ ।
 ୨. (୩) $k^2 + ୬k^2x + ୧୨kx^2 + ୮x^3$ ।
 (୪) $k^2 + ୬k^2x^2 + ୧୨kx^3 + ୮x^4$ ।
 (୫) $m^2 + ୩m^2 + ୩m^3 + ୫m^4 + ୩m^2 + ୬m + ୧$ ।
 ୨ । (୧) $k + ୨x + ୩m$ । (୨) ୧୧୧ ।
 (୩) $୨m^2 + ୩m - ୧$ । (୪) ୧୫୧୫୨ ।
 (୫) $k + x + ୧$ ।
 ୩ । (୧) $k + ୨x + ୩m$ । (୨) $k + ୨x^2$ । (୩) ୧୧୫ ।
 (୪) $m^2 + m + ୧$ । (୫) ୧୧ ।

৬। (১৬ পৃষ্ঠা)।

- ১। (১) ৪। (২) ২। (৩) ৫। (৪) $\sqrt{৫}$ সব। (৫) $\frac{১৫}{১০}$ ।
- ২। (১) $১^২ - ২সব^২ + ২সব^২ - ১^২$ । (২) $১^০ + ১ + ১^{-৪}$ ।
(৩) $১ - ক^২সব^২ + ক^২সব^২ - ১$ । (৪) $ক^২ + ক^{-২}$ ।
- ৩। (১) $\frac{২৩\sqrt{২}}{৩}$ । (২) ২। (৩) -১। (৪) $\frac{১ - \sqrt{১ - ১^২}}{১}$ ।
- ৪। (১) $\sqrt{২ + ১}$ । (২) $\sqrt{৩} - \sqrt{২}$ । (৩) $১ - \sqrt{২}$ ।
(৪) $\sqrt{৫ - ১}$ ।
- ৫। (১) $\frac{-১ - \sqrt{-৩}}{২}$ । (২) ১।

৭। (১০৬ পৃষ্ঠা)।

- ১। (১) ৫। (২) ৩। (৩) প-ক।
(৪) ৫। (৫) ১২।
- ২। (১) $\frac{১}{১২}$ । (২) ৫। (৩) অগবাহু ৪ টা ১২ মিনিট।
(৪) ১২০। (৫) ৫।
- ৩। (১) ১৩, ২। (২) ০২, ২২। (৩) ৪০, ৬০।
(৪) ১১, ৫। (৫) ১০, ১৫।
- ৪। (১) $\frac{১}{২}$ । (২) ৮। (৩) ২৫ মাইল, ১০০ মাইল।
(৪) ৩০, ৭৫, ৬। (৫) ৬, ৩।
- ৫। (১) ৩১, ১৭। (২) ৪, -১। (৩) ক, খ।
(৪) ২২, -১১। (৫) $\frac{১}{১২}$, ২।
- ৬। (১) $২, ১, \frac{৩ \pm \sqrt{-১}}{১}$ । (২) $\pm \sqrt{ক^২ + ১ + ২১২}$ ।
(৩) $\pm ৩, \pm \sqrt{১৪}$ । (৪) $\pm \sqrt{১, \frac{-ক^২ \pm \sqrt{ক^২ - ১}}{ক}}$ ।
(৫) $\pm \frac{\sqrt{২৭ক^২ - (১ - ২ক)^২}}{২৭}$ ।

৭। (১) ৭২। (২) ৭।

(৩) $(\sqrt{e}-1) \cdot \frac{k}{2}, (3-\sqrt{e}) \frac{k}{2}$ । (৪) ৩, -১।

(৫) ৬, ৪।

৮। (১) $\frac{(k-x)^2}{k+x}, \frac{8kx}{k+x}$ । (২) $\frac{\sqrt{k^2+x^2}}{2}, \frac{k^2-x^2}{\sqrt{2(k^2+x^2)}}$

(৩) ৩, ১, $2\sqrt{2}, \sqrt{2}$ । (৪) $2\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{2}}$ ।

(৫) $\pm 8, \pm 2$ ।

৯। (১) ৯, ৭। (২) ৯, ৬। (৩) ২০ হাত, ১০ হাত।

(৪) ৫ ইঞ্চি, ১২ ইঞ্চি, ১৩ ইঞ্চি। (৫) ১৭ হাত, ১৩ হাত।

৮। (১৫১ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৮। (২) ৩ ২ বা ২ ৩।

৩। (৩) ২।

৯। (১৬৭ পৃষ্ঠা)।

১। (২) ৫৫০। (৩) ৮(ক-৩স)।

২। (২) ১০২৩০। (৩) $১\frac{১}{২}$ ।

(৫) $\frac{১}{২}, ৪, ২০$ ।

৩। (৫) $\frac{কগ(ন-১)}{গ(ন-৪)+ক(স-১)}$ ।

১০। (১৮০ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৮৪০। (২) ১২০। (৩) ৮।

(৪) ২৪০।

২। (১) ১৭, ২। (২) ১০। (৩) ১০৫

(৫) ১২০, ১৭১।

১১। (১২৫ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৭৬০ সশ"। (২) ১২৬অ" স", ১২৬ অ" স"।

$$(৩) \frac{n(n-১)(n-২)}{r-১} \frac{(n-১+২)}{r-১}$$

$$\times (৪স) \frac{n-১+১}{(৩স) r-১}।$$

$$(৪) \frac{\frac{৩ন}{২ন} \frac{১}{ন}}{\frac{১}{ন}}।$$

$$২। (১) ২ - \frac{৪}{৫} \left\{ ১ + \frac{৬স^২}{৫} + \frac{৮১স^৩}{৫০} + \frac{৫৬৭স^৪}{১৫০} + \dots \right\}।$$

$$(৪) \frac{\frac{১২১}{১১-১} \frac{১}{(১১)২}}{১}।$$

১২। (২১০ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ২°৭২৫৮৮, ৪°৭২৫৮৮, ৫°৭২৫৮৮।

(২) ৩। (৩) ২°৩৩৪৪৫, ৩°৩৩৪২।

$$(৪) \frac{৪}{৩}। (৫) \frac{২লগ২}{লগ৩}।$$

$$২। (২) ১.৬৪৮। (৩) \frac{ইঅ-ই}{অ-১}।$$

